



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071
 אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטיין, י. שטראוס, ד. קרנר)
 תרגיל בית מס' 6.

(1) (א) חשבו: $\int_0^{2\pi} e^{\cos(n\cdot\phi)} \cos(n\cdot\phi + \sin(n\cdot\phi)) d\phi$, כאן $n \in \mathbb{Z}$. (רמז: איך זה קשור ל $e^{z^{n-1}}$?)

(ב) עבור פונקציות הבאות ותחומים הבאים קבעו האם לפונקציה קיימת פונקציה קדומה בתחום:

a. $\frac{1}{z^n}$ b. $\frac{\sin(z)}{z}$ c. $\frac{e^z-1}{z}$ d. $\frac{1}{z^2+z+1}$ e. $\frac{\cos(z)}{z}$
 i. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ii. $\{|Im(z)| > 1\}$ iii. $\{|Im(z)| < 1\}$ iv. $\{|z - e^{\frac{2\pi i}{3}}| < \frac{1}{2}\}$ v. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$

(ג) חשבו: i. $\int_{\substack{|z|=1 \\ z \neq -1}} \frac{\text{Log}(z)}{z} dz$ ii. $\int_{\substack{|z|=1 \\ z \neq -1}} \sqrt[n]{z} \frac{\sin(\sqrt[n]{z})}{z} dz$ (הענף הראשי של $\sqrt[n]{z}$)

(ד) תהי $f \in \mathcal{O}(U)$ כך ש f' רציפה ב U תהי $\gamma \subset U$ מסילה סגורה. נניח ש f מקיימת על γ : $|f(z) - 1| < 1$.
 הוכיחו: $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$

(2) (א) נגדיר קטע סגור $[a, b] \subset \mathbb{C}$ ע"י פרמטריזציה: $[a, b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$. הגדירו (בדומה) את הקטעים (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$. הוכיחו: $z \in (a, b)$ אם $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}_{<0}$. נסחו והוכיחו טענות דומות עבור (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$.

(ב) נקבע $a, b \in \mathbb{C}$ כך ש $a \neq b$. נגדיר פונקציה $F(z) = \text{Log}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ בתחום $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

(i) בדקו ש F מוגדרת היטב (חד-ערכית) ואנליטית.

(ii) הוכיחו ש $F(z)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(z) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$ בתחום $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

האם לפונקציה $f(z)$ קיימת קדומה בתחום $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$? (אם כן - מצאו אחת, אחרת - הוכיחו שאין)

(ג) נגדיר $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ בתחום $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{it \mid t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$.

(i) הראו כי קיימת ל f פונקציה קדומה $F \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ כך ש $F(0) = 0$.

(ii) נגדיר $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. תהי $U \subset \mathbb{C}$ פתוחה וקשירה מסילתית ומכילה את הראשית כך ש $\tan(U) \subseteq \mathcal{D}$.

הוכיחו כי ב U מתקיים $F(\tan(z)) \equiv z$ (ולכן $F(z)$ הינו ענף אנליטי של $\arctan(z)$)

(3) יהי $\gamma \subset \mathbb{C}$ עקום סגור שלא עובר דרך נקודה z_0 . נגדיר את ה"אינדקס של γ ביחס ל z_0 " ע"י $\eta(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$

שם אחר למספר זה: *winding number*.

(א) חשבו את $\eta(\gamma, z_0)$ עבור $\gamma = \{z_0 + e^{2\pi i t n}, t \in [0, 1]\}$. כאן $n \in \mathbb{Z}$.

(ב) נניח ש $|z_0| < 1$. חשבו את $\eta(\gamma, z_0)$ עבור $\gamma = \{e^{2\pi i t n}, t \in [0, 1]\}$.

(ג) נניח ש $|z_0| > 1$. חשבו את $\eta(\gamma, z_0)$ עבור $\gamma = \{e^{2\pi i t n}, t \in [0, 1]\}$.

(ד) יהי $U \subset \mathbb{C}$ תחום פתוח וחסום. נניח ש $z_0 \notin \bar{U}$. הוכיחו: $\eta(\partial U, z_0) = 0$.

(ה) הוכיחו ש $\eta(\gamma, z_0)$ מספר שלם.

(תזכורת: בתרגיל בית 5, שאלה 3, הראינו כי $\gamma(t) = z_0 + e^{\delta t}$ עבור מסילה מסוימת $\mathbb{C} \xrightarrow{\delta} [0, 1]$.)

(ו) תהיינה $\mathbb{C} \xrightarrow{\gamma_1, \gamma_2} [0, 1]$ שתי מסילות המקיימות $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. נגדיר מסילה חדשה, $\mathbb{C} \xrightarrow{\gamma_2 * \gamma_1} [0, 1]$,

שתיקרא השרשור של המסילות, ע"י: $(\gamma_2 * \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

נניח ש γ_1, γ_2 מסילות סגורות שלא עוברות דרך z_0 . הוכיחו: $\eta(\gamma_2 * \gamma_1, z_0) = \eta(\gamma_2, z_0) + \eta(\gamma_1, z_0)$.