יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. אידלשטין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 8.

(1) שאלות חזרה

(א) חשבו $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{zt}dz}{z^2+1}$, כאן $t \in \mathbb{R}$.

(ב) (i) האם קיים טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ המקיים: רדיוס ההתכנסות שלו r והטור מתכנס ב $\overline{Ball_r(0)}$ כולו?

(ii) האם קיים טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ המקיים: רדיוס ההתכנסות שלו r והטור לא מתכנס באף נקודה של $\partial Ball_r(0)$?

(iii) נגדיר פונקציה ע"י $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ונניח שמתקיים: $lim\ sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. חשבו $\int\limits_{|z|=1} f(z)dz$.

(ג) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ ונניח ש $ord_{z_0}(f) = n$ עבור $z_0 \in \mathcal{U}$. הוכיחו שקיימת $g \in \mathcal{O}(Ball_{\epsilon}(z_0))$, עבור $\epsilon > 0$ קטן, המקיימת: $g^n(z) = f(z)$. (ניסוח אחר: קיימת החלפת משתנים אנליטית, $z(w) \leftrightarrow w(z)$, המעבירה את f ל w^n.)

(2) (א) נניח ש $f \in \mathcal{O}(Ball_{\epsilon}(0))$ מקיימת: $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$ עבור $1 \ll n \in \mathbb{N}$. חשבו את $f(\frac{\epsilon}{2})$.

(ב) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_{\frac{3}{2}}(0))$. הוכיחו שקיים $n \in \mathbb{N}$ שעבורו: $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n+1}$.

(ג) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ לא קבועה ומקיימת: $f(z) = f(\lambda z)$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$. מה הערכים האפשריים של λ?

(ד) נניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $f(it) = f(it + i\sqrt{2}) = f(it + i)$ עבור כל $t \in \mathbb{R}$. מצאו את f.

(ה) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. ניקח את הפיתוח טיילור שלה בנקודה z_0: $f(z) = \sum c_{n,z_0}(z - z_0)^n$. נניח שעבור כל נקודה $z_0 \in \mathcal{U}$ מתקיים: $c_{1001,z_0} = 0$. הוכיחו ש f הינה פולינום.

(ו)★ תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. ניקח את הפיתוח טיילור שלה בנקודה z_0 כ $f(z) = \sum c_{n,z_0}(z - z_0)^n$. נניח שעבור כל נקודה z_0 מתקיים: $c_{n,z_0} = 0$, עבור n מסוים (התלוי ב z_0). הוכיחו ש f הינה פולינום. (רמז: קבוצת בת-מניה)

(3) (א) מצאו min, max של פונקציה $|z^4 - z|$ בתוך $\{|z| \leq 1\}$.

(ב) נסמן $[0, 2\pi]^2 := \{x + iy \in \mathbb{C}|\ x, y \in [0, 2\pi]\}$. מצאו $\max\limits_{z \in [0,2\pi]^2} |sin(z)|$.

(ג) (i) יהי $|a| \neq 1$. הראו כי לכל z המקיים $|z| = 1$ מתקיים: $|z - a| = |1 - \bar{a}z|$.

(ii) תהיינה $|a_1|, \dots, |a_n| < 1$. נגדיר $f(z) = \frac{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}{(1-\bar{a}_1 z)\cdots(1-\bar{a}_n z)}$. הוכיחו ש $|f(z)| < 1$ לכל $|z| < 1$.

(ד) תהיינה $f, g \in \mathcal{O}(\overline{\mathcal{U}})$. הוכיחו ש $max(|f| + |g|)$ מתקבל רק ב $\partial\mathcal{U}$. (רמז: תתבוננו ב $e^{i\alpha}f + e^{i\beta}g$)

(ה) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ לא קבועה ותהי $z_0 \in \mathcal{U}$. הוכיחו/הפריכו:

(i) z_0 אינה נקודת min מקומי של $|f(z)|$.

(ii) אם $f(z_0) \neq 0$ אז z_0 אינה נקודת min מקומי של $|f(z)|$.

(iii) פונקציות $Re(f)$, $Im(f)$ לא מקבלות min/max מקומיים ב z_0.

(ו) יהי $Box \subset \mathbb{C}$ ריבוע (סגור) עם מרכז בראשית וצלעות l_1, l_2, l_3, l_4 המקבילים לצירים. תהי $f \in \mathcal{O}(\overline{Box})$ ונניח: $\{|f|_{l_i}| \leq m_i\}_{i=1..4}$. הוכיחו: $|f(0)| \leq \frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4}$. (רמז: הגדירו פונקצית עזר עם חסם אחיד על הצלעות.)

(4) (א) תהי $\overline{Ball_1(0)} \xrightarrow{f} \overline{Ball_1(0)}$ אנליטית. נניח ש $ord_0(f) \geq n$. הוכיחו: $|f(z)| \leq |z|^n$.

(ב) תהי $f \in \mathcal{O}\left(\overline{Ball_1(0)}\right)$ כך ש $|f(z)| \leq 1$ ו $f(0) = 0$. הוכיחו: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ מתכנס במ"ש ב $Ball_r(0)$ עבור כל $r < 1$.

(ג) תהי $\overline{Ball_1(0)} \xrightarrow{f} \overline{Ball_1(0)}$ אנליטית ומקיימת: $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. הוכיחו: $f(z) \equiv z$.

(ד) תהי $f \in \mathcal{O}\left(\overline{Ball_1(0)}\right)$ כך ש $|f(z)| \leq 1$ ו $f(0) = 0$. הוכיחו: $|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2$.

(ה) נניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $|f| \leq 1$. הוכיחו $|\oint\limits_{|z|=1} f(z)dz| \leq 4$.