יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 9.

(1) נניח שפולינום $p(z)=\sum_{j=0}^{n} p_j z^j$ חסום ע"י 1 ב $Ball_1(0)$. הראו כי $|p_j|\le 1$.

(2) נקבע טור לורן, $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$.

(א) הוכיחו כי קיימים $0\le r\le R\le\infty$ כך שהטור מתכנס בהחלט בתחום $\{z|\ r<|z|<R\}$ ומתבדר בכל נקודה של התחום $\{z|\ |z|<r\}\cup\{z|\ |z|>R\}$.

(ב) איך ניתן לחשב את r,R דרך $\{c_n\}$?

(3) (א) פתחו את הפונקציות הבאות לטורי לורן סביב הראשית בכל הטבעות בהן מוגדרת הפונקציה:

i. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ ii. $f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z^3}$ iii. $\frac{sin\frac{1}{z}}{z-2}$

(ב) מצאו את החלק העיקרי של טור לורן של $\frac{e^{z^2}}{1-cos(e^z-1)}$, בטבעת $0<|z|<R$ מצאו את הערך הגדול ביותר של R.

(ג) תהי $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ ונניח שעל המעגל $\{|z|=\rho\}$ מתקיים $|f(z)|\le C$. הוכיחו: $|a_n|\le\frac{C}{\rho^n}$ עבור כל $n\in\mathbb{Z}$.

(ד) נגדיר $q=e^{2\pi i\alpha}$ כאשר $\alpha\in(0,1)$ לא רציונלי. נקבע $\mathcal{U}_{r,R}:=\{z|\ r<|z|<R\}$.
מצאו את כל הפונקציות $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U}_{r,R})$ המקיימות: $f(z)=f(qz)$ עבור כל $z\in\mathcal{U}_{r,R}$.

(4) (א) מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות וציינו את סדר הפונקציה בכל נקודה: i. $\frac{tan(z\sqrt{2})}{ctan(z\sqrt{3})}$ ii. $e^{\frac{1}{cos(z)}}$

(ב) תהיינה $f,g\in\mathcal{O}\big(\mathcal{U}\setminus\{z_0\}\big)$. מיינו את סוג הנקודה $z=z_0$ (ואת סדר הפונקציה בה) עבור הפונקציות:

a. $f+g$,   b. $f\cdot g$,   c. $\frac{1}{f}$,   d. f',   e. $g^{(n)}$,   f. e^f,   כאשר ידוע ש:

(i) ל f יש נקודה סינגולרית עיקרית ול g יש קוטב מסדר m ב z_0.

(ii) ל f יש נקודה סינגולרית סליקה ול g יש נקודה סינגולרית עיקרית ב z_0.

(iii) ל f יש קוטב מסדר n ול g יש קוטב מסדר m ב z_0 ($m<n$).

(ג) נניח שעבור $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U}\setminus\{z_0\})$ מתקיים: $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$. הוכיחו: z_0 הינה נקודה סינגולרית סליקה.
(לטענה זו קוראים: Riemann's principle of removable singularities)

(ד) הוכיחו שבכל סביבה של $z=0$ למשוואה $f(z)=e^{\frac{1}{z}}Log(1+z^3)-cos(z^2)=0$ יש אינסוף "פתרונות מקורבים".
(נקודה z_0 נקראת פתרון מקורב אם מתקיים $|f(z_0)|<\epsilon$, עבור דיוק ϵ נתון.)

(ה) האם קיימת $f\in\mathcal{O}(Ball_\epsilon(0)\setminus\{0\})$ המקיימת: $|f(z)|\ge C\cdot e^{\frac{1}{|z|}}$? (כאן C הינו קבוע.)

(5) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{h}\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ומחזורית, עם מחזור 2π. נגדיר $\partial Ball_1(0)\xrightarrow{g}\mathbb{C}$ על-ידי $g(e^{it})=h(t)$.

מקדמי פורייה של h מוגדרים להיות $\hat{h}(n):=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}h(t)e^{-int}dt$.

נגדיר $Ball_1(0)\xrightarrow{f_1}\mathbb{C}$ על-ידי $f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Ball_1(0)}\frac{g(\xi)}{\xi-z}d\xi$, ו $\mathbb{C}\setminus\overline{Ball_1(0)}\xrightarrow{f_2}\mathbb{C}$ על-ידי $f_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Ball_1(0)}\frac{g(\xi)}{\xi-z}d\xi$.

(א) מה הקשר בין מקדמי טור טיילור של f_1 (ב $z=0$) ומקדמי טור לורן של f_2 (ב $z=0$) למקדמי פורייה של h?

(ב) נניח שניתן להרחיב את g לפונקציה אנליטית בטבעת שמכילה את מעגל היחידה.

(i) הראו כי ניתן להרחיב את f_1 לפונקציה אנליטית ב $Ball_{1+\epsilon}(0)$ ושניתן להרחיב את f_2 לפונקציה אנליטית ב $Ball_{1-\epsilon}(0)$ עבור $\epsilon>0$ קטן.

(ii) הראו כי $h(t)=f_1(e^{it})+f_2(e^{it})$.