אינפי גיאומטרי 1, בוחן אמצע

אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.1031. מרצה: ד. קרנר תאריך: 02.01.2020 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים	כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) הוכיחו/הפריכו:

(א) (10 נקודות) אם בקבוצה $\mathbb{R}^n \setminus S$ אין נקודות פנים אז $\overline{S} = \mathbb{R}^n$.

(ב) (10 נקודות) אם $S \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה אז כל ההיטלים שלה על מישורים $\{x_j = 0\}$, $j = 1 \dots n$, הן קבוצות פתוחות.

(2) (א) (10 נקודות) האם $f(x,y) = \frac{sin^2(x)sin^2(y)}{x^2+y^2}$ ניתנת להרחבה ל $\mathbb{R}^2$ כולו בצורה דיפרנציאבילית?

(ב) (15 נקודות) תהי $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה ולא סגורה. הוכיחו: קיימת פונקציה $S \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ רציפה ולא הסומה.

(3) ניקח איזומורפיזם סטנדרטי $Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (כל מטריצה נשלחת לוקטור הרכיבים שלה).
ניקח את הנורמה על $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ המושרית מהנורמה הרגילה על $\mathbb{R}^{n^2}$.

(א) (15 נקודות) האם קבוצה $GL(n,\mathbb{R}) \subset Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ קשירה מסילתית?

(ב) (15 נקודות) חשבו את העתקת הנגזרת של פונקציה $Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\phi} Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\phi(X) = X^2$.
(כאן לא צריך לרשום את המטריצה המייצגת של הנגזרת, מספיק לחשב את $\phi'(\Delta)$ עבור $\Delta \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$)

(4) (א) (15 נקודות) תהי $S \subset \mathbb{R}^4$ מוגדרת ע"י המשוואה $\sum_{i=1}^{4} x_i^6 = sin^2(x_1x_2x_3)$. נגדיר פונקציה $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^3$ ע"י $\pi(\underline{x}) = (x_1, x_2, x_4)$. הוכיחו: עבור כל נקודה $q \in \mathbb{R}^3$ קיימת נקודה $p \in \pi(S)$ כך ש $d\big(\pi(S), q\big) = d(p,q)$. (המרחק)

(ב) (10 נקודות) תהי $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ C^1. נניח שעבור כל $p \in \mathbb{R}^2$ וכל $\epsilon > 0$ קיימות נקודות $q_0, q_x, q_y \in Ball_\epsilon(p)$ כך ש $(q_x - q_0)$ מקביל לציר $\hat{x}$, $(q_y - q_0)$ מקביל לציר $\hat{y}$, ומתקיים $f(q_0) = f(q_x) = f(q_y)$. הוכיחו: f פונקציה קבועה.

בהצלחה!