

אינפי גיאומטרי 1, מועד א.

אוניברסיטת בן גוריון

<p style="text-align: center;">כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבדוק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.1031 מרצה: ד. קרנר תאריך: 06.02.2020 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>
---	---

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) (א) (10 נקודות) הוכיחו/הפריכו: אם S_1 סגורה ו S_2 קומפקטית אז קיימות נקודות $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ שעבורן:
 $d(S_1, S_2) = d(s_1, s_2)$ (כאן $-d(S_1, S_2)$ המרחק בין הקבוצות)

(ב) (10 נקודות) האם הפונקציה $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ רציפה במ"ש ב $(0, 0) \setminus \text{Ball}_1(0, 0)$?

(2) (א) (10 נקודות) מצאו ומיינו את כל נקודות הקיצון של פונקציה $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i$ על הקבוצה
 $S = \{x \mid \sum_{i=1}^n x_i^p = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. כאן p זוגי חיובי.

(ב) (15 נקודות) יהי $C = \{f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ עקום קשיר מסילתי, $f \in C^1$. נניח ש $f'|_{(x,y)} \neq 0$ עבור כל $(x, y) \in C$.
 וגם C משיק לציר \hat{x} בנקודה $(1, 0)$ ולציר \hat{y} בנקודה $(0, 1)$. הוכיחו: C משיק לישר $x + y = d$ עבור d מסוים.

(3) (א) (10 נקודות) תהי $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$, C^1 . נניח ש f' לא מנוונת בבאף נקודה של \mathcal{D} . תהי \mathcal{U} פתוחה וחסומה שמקיימת
 $\mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{D}$. הוכיחו: $f(\partial\mathcal{U}) \supseteq \partial f(\mathcal{U})$.

(ב) (15 נקודות) נניח ש $S = \{f(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה חסומה ואינה נקודה אחת. (כאן $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$)
 (i) נניח ש f' לא מתאפסת באף נקודה של S . הוכיחו: עבור כל וקטור $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ התנאי $\vec{v} \parallel \text{grad}(f)$ מתקיים לפחות פעמיים על S . (רמז: מספיק לבדוק עבור $\vec{v} = \hat{z}$)
 (ii) הוכיחו את המקרה הכללי (בלי להניח ש f' לא מתאפסת). כאן: וקטור אפס מקביל לכל וקטור.

(4) (א) (15 נקודות) תהי $\{\mathbb{R}^n \supset \text{Box} \xrightarrow{f_i} [0, 1]\}_i$ סדרת פונקציות אינטגרביליות. הוכיחו: $\sum_{i=1}^\infty \frac{f_i}{2^i}$ פונקציה אינטגרבילית.

(ב) (15 נקודות) חשבו $\iiint_V |y|e^{x^2} dx dy dz$ עבור $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y^2 + z^2 \leq x^{\frac{2}{3}} \leq 1, \frac{y}{2} \leq z \leq y\}$

בהצלחה!