אינפי גיאומטרי 1, מועד ב.
אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.1031. מרצה: ד. קרנר תאריך: 27.02.2020 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים	כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) (א) (10 נקודות) תהי $\mathbb{R}^n \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ סדרת קבוצות קומפקטיות. הוכיחו: $\varnothing \neq \cap K_i$.

(ב) (10 נקודות) תהי $K \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה קומפקטית. ניקח מישורים $L_c := \{x_1 + x_2 + x_3 = c\} \subset \mathbb{R}^3$.
הוכיחו: קיים c כך ש $L_c \cap K \neq \varnothing$ אבל $L_{c+\epsilon} \cap K = \varnothing$ עבור כל $\epsilon > 0$.

(2) (א) (15 נקודות) תהי $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית, $f(0) = 0$, ותהי $\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^1$ רציפה. הוכיחו: $f \cdot g$ דיפרנציאבילית ב 0.

(ב) (15 נקודות) תהי $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A = A^t$ ונגדיר $S^{n-1} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ע"י $f(\underline{x}) = \underline{x}^t \cdot A \cdot \underline{x}$.
מצאו ומיינו את כל הנקודות הקריטיות של f. מצאו את ה min/max המוחלטים.

(3) תהיינה $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f, g_1, g_2} \mathbb{R}$ פונקציות C^1. תהי $\mathcal{U} := \{\underline{x} |\ g_1(\underline{x}) > 0,\ g_2(\underline{x}) > 0\} \neq \varnothing$.

(א) (10 נקודות) הוכיחו: $\partial\mathcal{U} \subseteq g_1^{-1}(0) \cup g_2^{-1}(0)$.

(ב) (15 נקודות) נניח ש $\underline{x}_0$ היא נקודת מינימום (מקומית) של f על $\partial\mathcal{U}$.
נגדיר מרחב וקטורי $V := Span_{\mathbb{R}}(f'|_{\underline{x}_0}, g_1'|_{\underline{x}_0}, g_2'|_{\underline{x}_0}) \subseteq Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$. הוכיחו: $dim(V) \leq 2$.

(4) ניקח איזומורפיזם סטנדרטי $Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. (כל מטריצה נשלחת לווקטור הרכיבים שלה)
ניקח את הנורמה על $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ המושרית מהנורמה הרגילה על $\mathbb{R}^{n^2}$.

(א) (10 נקודות) נגדיר פונקצית $Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{det} \mathbb{R}$. הוכיחו: $(det)'|_A(\Delta) = trace(A^\vee \cdot \Delta)$.
(כאן $\Delta \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A^\vee$ - המטריצה המצורפת)

(ב) (15 נקודות) נגדיר תת-קבוצות: $\Sigma_r = \{A |\ rank(A) \leq r\} \subseteq Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.
הוכיחו: $\Sigma_{n-1} \setminus \Sigma_{n-2}$ הינו משטח-על חלק.

בהצלחה!