אינפי גיאומטרי 1, מועד ג.
אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.1031. מרצה: ד. קרנר תאריך: 11.10.2020 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים	<u>כללים</u> : אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".

<u>יש לנמק היטב את כל התשובות.</u>

(1) (א) (10 נקודות) הוכיחו/הפריכו: פונקציה $\mathbb{R}^n \supseteq \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ רציפה אמ"מ $f^{-1}(X) \subseteq \mathscr{D}_f$ סגורה עבור כל קבוצה סגורה $X \subseteq \mathbb{R}^m$.

(ב) (10 נקודות) תהי $S \subset \mathbb{R}^n$ ונקבע נקודות $p \in int(S)$, $q \in int(\mathbb{R}^n \setminus S)$. הוכיחו: כל מסילה מ p ל q חוצה את ∂S.

(2) (א) (10 נקודות) נניח שפונקציה $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ מקיימת: $f(x) = o(||x - x_0||)$. (כלומר $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{||x-x_0||} = 0$)
הוכיחו: f דיפרנציאבילית ב $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(ב) (15 נקודות) תהי $\mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית, דיפרנציאבילית בפנים, $int(\mathscr{D}_f) \neq \varnothing$, וקבועה על השפה, $\partial \mathscr{D}_f$. הוכיחו: קיימת נקודה $c \in int(\mathscr{D}_f)$ שבה $f'|_c = 0$.

(3) (א) (10 נקודות) הוכיחו את אי-שיוויון הממוצעים: $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$. כאן $\{x_i \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ב) תהי $\mathbb{R}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1$ פונקצית C^∞ המקיימת: $|f'(t)| < 1$, $t \in \mathbb{R}^1$. נגדיר העתקה $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$ ע"י $F(x,y) := (x + f(y), y + f(x))$.
(i) (10 נקודות) הוכיחו: F הפיכה מקומית בכל נקודה של $\mathbb{R}^2$.
(ii) (10 נקודות) הוכיחו: אם $|f'(t)| < 1 - \epsilon$ אז F הפיכה גלובלית ב $\mathbb{R}^2$.

(4) (א) (10 נקודות) תהי $\{p_i\}$, $i = 1, 2 \dots$ סדרת נקודות מתכנסת ב $\mathbb{R}^n$. הוכיחו: $vol_n\{p_1, p_2, \dots\} = 0$.

(ב) (15 נקודות) חשבו $\iiint\limits_V \frac{x}{1+x^2} dxdydz$ כאשר $V = \left\{x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1, \ \ x \geq 0, \ \ 4y^2 + 9z^2 \geq \frac{1}{2}\right\}$.

בהצלחה!