



## חדו"א 3, להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 0.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

התרגיל הינו תרגיל רענון על חומר הנדרש לקורס שלנו.

1. (א) יהיו וקטורים ב  $\mathbb{R}^3$ , שיוצרים זווית  $120^\circ$  ואורכם  $\|\vec{v}\| = 3$ ,  $\|\vec{u}\| = 4$ . חשבו:
- i.  $\|\vec{v} + \vec{u}\|$ , (תזכורת:  $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ , מכפלה פנימית רגילה) ii.  $(3\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (2\vec{v} - 2\vec{u})$ .
- (ב) עבור כל שני וקטורים,  $\vec{v}, \vec{u}$  ב  $\mathbb{R}^2$  הוכיחו:  $|\vec{v} + \vec{u}|^2 + |\vec{v} - \vec{u}|^2 = 2(|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2)$ . תנו פירוש גאומטרי.
- (ג) חשבו את זוויות המשולש על קודקודים  $(0, 0, 5)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, -1, 3)$ .
- (ד) הוכיחו כי אלכסוני כל מעוין ניצבים.
2. (א) מצאו נקודת החיתוך והזווית בין הישרים:  $\{2x+3y=1\}$ ,  $\{3x+ay=2\}$ . עבור איזה ערך של  $a$  הישרים מקבילים?
- (ב) מצאו את כל המשיקים ל  $\{y = x^2\}$  העוברים דרך הנקודה  $(-3, 8)$ .
- (ג) חשבו את הזוויות בין העקומות  $\{y = \sin(x)\}$ ,  $\{y = \cos(x)\}$  בנקודות החיתוך שלהן. (כלומר את הזווית בין המשיקים).
- (ד) מצאו את המרחק (הקצר ביותר) בין נקודה  $(0, 1, 2)$  לישר  $\{(1, 2, 1) + t(1, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ .
- (ה) עבור אלו ערכים של  $a$  הנקודות  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$ ,  $(7, 12, a)$  נמצאות על אותו ישר?
- (ו) עבור כל שלשה של נקודות קבעו האם עובר דרכה מישור יחיד. אם כן, מצאו את הנורמל שלו והמשוואה שלו.
- i.  $(1, 0, 1)$ ,  $(2, 1, 2)$ ,  $(0, -1, 0)$ . ii.  $(1, 2, 3)$ ,  $(3, 1, 2)$ ,  $(2, 3, 1)$ .
3. (א) מצאו את כל הנקודות  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  שעבורן הדרגה של המטריצה  $\begin{bmatrix} x^2 & y^3 & z^2 \\ y & x^2 & z \end{bmatrix}$  שווה לאחד. (תזכורת/רמז: לא חייבים לדרג את המטריצה, מספיק לבדוק שכל המינורים  $2 \times 2$  מתאפסים)
- (ב) הוכיחו שכל פולינום  $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  ניתן להצגה כ-  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot A_p \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , כאשר  $A_p$  מטריצה  $2 \times 2$ ,  $A_p = A_p^t$ .
- (ג) הוכיחו:  $p(x, y) > 0$  עבור כל  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(0, 0) \neq (x, y)$  אם"מ הערכים העצמיים של  $A_p$  הינם מספרים (ממשיים) חיוביים. (הדרכה: צריכים לבדוק  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot A_p \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} > 0$  עבור כל  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(0, 0) \neq (x, y)$ . למדתם כי כל מטריצה סימטרית ניתנת ללכסון אורתוגונלי,  $A_p = U \cdot \text{Diag}_p \cdot U^t$ , לכן מספיק לבדוק:  $v \cdot \text{Diag}_p \cdot v > 0$  עבור כל  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $(0, 0) \neq v$ .)
- (ד) האם עבור כל  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  מתקיים  $3x^2 - 7xy + 5y^2 \geq 0$ ?
4. (א) ציירו את הגרפים של הפונקציות הבאות: i.  $f(x) = |1 - x| + |1 + x|$ . ii.  $f(x) = x^\alpha$ , כאן הבדילו בין המקרים:  $\alpha < 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha > 1$ .
- (ב) ציירו את התחומים הבאים ב  $\mathbb{R}^2$ : i.  $\{|x| + |y| \leq 1\}$ . ii.  $\{|2x - y| + |2y - x| \leq 1\}$ . iii.  $\{-1 \leq xy \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}$ . iv.  $\{-1 \leq xy \leq 1, -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1\}$ .

(ג) ציירו את העקומות הבאות ב  $\mathbb{R}^2$ : i.  $\{x^2 = y^2\}$  ii.  $\{x^2 + 1 = y^2\}$  iii.  $\{x(x-1)(x+1) = 0\}$   
 iv.  $\{(x^2-1)(y^2-1) = 0\}$  v.  $\{((x+y)^2-1)((x-y)^2-1) = 0\}$  vi.  $\{4(x-2)^2+9(y-3)^2 = 1\}$   
 vii.  $\{|x|^\alpha + |y|^\alpha = 1\}, \alpha > 0$ . (הדרכה: מספיק לצייר את חלק העקום ברביע הראשון. הציגו את העקום כגרף של פונקציה  $y = (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  היעזרו בגרף שציירתם בשאלה 4.א.) מה מקבלים עבור  $\alpha = 1$ ?  $\alpha = 2$ ?  $\alpha = 10$ ?

5. (א) האם ניתן להרחיב את תחום הגדרה של הפונקציה ל  $\mathbb{R}$  כולו כך שתישאר רציפה? i.  $f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$   
 ii.  $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$  iii.  $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$  iv.  $f(x) = (1 + \sin(x))^{\cot(2x)}$

(ב) הוכיחו שפונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \cdot \arctan(x)$  הפיכה.  
 האם הפונקציה ההופכית רציפה/גזירה? (באילו נקודות?)

6. בדקו באילו נקודות הפונקציות הבאות גזירות? גזירות פעמיים? i.  $f(x) = |x|^{\frac{7}{3}}$   
 ii.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$  iii.  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$  iv.  $f(x) = \arcsin(\cos(x))$

7. (א) חשבו: i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$  ii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \arctan \frac{k}{n}}{n^3}$  iii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k) - \ln(n)}{n}$  (רמז: סכומי רימן)

(ב) חשבו: i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}$  ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan(t))^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$  iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\sin(x)}^{\sin(\sin(x))} e^{t^2} dt}{x^2}$  iv.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\tan(x)} t \cdot \sin(at) dt}{x - \sin(x)}$

8. (א) הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה מתקיים:  $\int_0^\pi x f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x)) dx$  (רמז: הצבה  $t = \pi - x$ )

(ב) הוכיחו כי פונקציית Dirichlet,  $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ , אינה אינטגרבילית באף קטע.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם  $|f|$  אינטגרבילית ב  $[a, b]$  אז גם  $f$  אינטגרבילית ומתקיים  $|\int_a^b |f(x)| dx| \geq |\int_a^b f(x) dx|$

(ד) חשבו את אורך העקומות הבאות. i.  $\left\{ \begin{array}{l} x = \cos(t), \\ y = t + \sin(t), 0 \leq t \leq \pi \end{array} \right.$  ii.  $x \in [p, q], y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$   
 iii.  $0 \leq \phi \leq b, r = a \cdot \phi$  iv.  $\{y = \ln \sin x, x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]\}$  v.  $\{\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

### שאלות נוספות

9. (א) ציירו גרפים של פונקציות הבאות i.  $f(x) = [x]$  (החלק השלם) ii.  $f(x) = (-1)^{[x]}$  iii.  $f(x) = x - [x]$   
 (ב) ציירו את העקומות הבאות. (העקומות מוגדרות ע"י משוואות שרשומות בקואורדינטות קוטביות  $(r, \phi)$ )  
 i.  $\{r = \cos(\phi)\}$  ii.  $\{r = |\sin(6\phi)|\}$  iii.  $\{r = \phi, \phi \in [0, \infty)\}$  iv.  $\{r = \cos^2(\phi)\}$

10. תהא  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ , עבור קבועים  $C > 0, \alpha > 1$  וכל הנקודות  $x, y \in \mathbb{R}$ , אז  $f$  קבועה.  
 (ב) אם  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  אז עבור כל קבוע  $a$  מתקיים:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+a) - f(x)) = 0$ . האם  $f(x)$  בהכרח חסומה?