חדו"א 3, להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 1.

(מרצים: ד .גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. מיינו את מישורי קואורדינטות ממימד 1,2,3 ב $\mathbb{R}^4$. תארו את כל החיתוכים שלהם.

2. (א) הוכיחו כי הנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) ב $\mathbb{R}^2$ נמצאות על ישר אחד אמ"מ $\det\begin{bmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{bmatrix}=0$. (בכמה דרכים שונות תוכלו להוכיח זאת?)

(ב) הכלילו את הטענה ל: "N נקודות ב $\mathbb{R}^2$ יושבות על ישר אחד אמ"מ ..."

(ג) הכלילו את הטענה ל: "N נקודות ב $\mathbb{R}^n$ יושבות על ישר אחד אמ"מ ..."

(ד) נקבע מספרים שונים $\lambda_1,\ldots,\lambda_N\in\mathbb{R}$, כלומר $\lambda_i\neq\lambda_j$ עבור $i\neq j$. בהתאם ניקח נקודות $\{(\lambda_i,\lambda_i^2,\ldots,\lambda_i^n)\}_{i=1,\ldots,N}$ ב $\mathbb{R}^n$. הוכיחו: בין הנקודות האלו אין שלוש על ישר אחד. (רמז: Vandermonde)

(ה) נניח שהנקודות (x_1,y_1,z_1), $(x_2.y_2,z_2)$, (x_3,y_3,z_3) ב $\mathbb{R}^3$ לא יושבות על ישר אחד. הוכיחו שמשוואת המישור העובר דרך הנקודות נתונה ע"י: $\det\begin{bmatrix}x_1-x&y_1-y&z_1-z\\x_2-x&y_2-y&z_2-z\\x_3-x&y_3-y&z_3-z\end{bmatrix}=0$

(בפרט בדקו שהמשוואה הינה לינארית. מה קורה עבור נקודות על ישר אחד?)

(ו) בצורה דומה קבלו תנאי: "N נקודות ב $\mathbb{R}^3$ יושבות על מישור אחד אמ"מ ..."

(ז) הקוביה הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$ מוגדרת ע"י $\{(x_1,\ldots,x_n)|\ 0\leq x_i\leq 1,\ \forall i\}$. (ציירו אותה במקרים $n=1,2,3$). הקודקודים של הקוביה הם הנקודות מהצורה: $(x_1,\ldots,x_n)$, כאן כל x_i הינו 0 או 1. נסמן ע"י d_n את המרחק הגדול ביותר בין הקודקודים. מצאו את d_n. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty}d_n$. (למרות שהקוביה "מאוד חסומה", אי אפשר לחסום את המרחקים בה בצורה אחידה)

3. (א) הוכיחו: i. $\vec u\cdot(\vec v\times\vec w)=\vec v\cdot(\vec w\times\vec u)=-\vec w\cdot(\vec v\times\vec u)$ ii. $\vec v\cdot(\vec v\times\vec w)=0$

iii. $(\vec u\times\vec v)\times\vec w=(\vec u\cdot\vec w)\vec v-(\vec v\cdot\vec w)\vec u$ iv. $(\vec u\times\vec v)\times\vec w+(\vec v\times\vec w)\times\vec u+(\vec w\times\vec u)\times\vec v=\vec 0$.

(ב) יהיו $\vec v$, $\vec u$, $\vec w$ שלושה וקטורים ב $\mathbb{R}^3$. הראו כי נפח המקבילון הנוצר ע"י $\vec v$, $\vec u$, $\vec w$ נתון ע"י: $\left|\vec v\cdot(\vec u\times\vec w)\right|$.

4. (א) מצאו את הישר העובר דרך הנקודה $(0,1,1)\in\mathbb{R}^3$ והמאונך למישור הנתון ע"י $x-2y+3z=4$.

(ב) לכל ערך של פרמטר c מצאו את המרחק בין הישרים הנתונים בצורה פרמטרית $l=\{(0,1,1)+t(1,1,-2)|\ t\in\mathbb{R}\}$, $l'=\{(1,0,c)+t(2,-2,0)|\ t\in\mathbb{R}\}$. עבור אילו ערכים של c הישרים נחתכים?

(ג) מצאו את הזווית בין הישר $l=\{(1,2,3)+t(-1,1,-1)|\ t\in\mathbb{R}\}$ והמישור L העובר דרך הנקודות $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$.

(ד) מצאו את הזווית בין המישורים $L=\{(0,2,0)+t(1,2,3)+\tau(1,1,1)|\ t,\tau\in\mathbb{R}\}$, $\tilde L=\{(x,y,z)|\ x-y+z=1\}$.

(ה) מצאו את הנקודה הסימטרית לנקודה $(2,-3,4)$ ביחס למישור $3x+4y+5z+36=0$.

5. (א) בהינתן וקטור $\vec v\in\mathbb{R}^3$ ומישור $\{\vec{\mathcal N}\cdot(x,y,z)=d\}$, נציג $\vec v=\vec v_\perp+\vec v_{||}$, כאשר $\vec v_\perp$ מאונך למישור ו $\vec v_{||}$ מקביל למישור. בטאו את $\vec v_\perp$, $\vec v_{||}$ דרך $\vec v$, $\vec{\mathcal N}$, d.

(ב) הוכיחו שהמרחק (הקטן ביותר) מנקודה $(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$ למישור $\{ax+by+cz=d\}\subset\mathbb{R}^3$ נתון ע"י $\frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(ג) הוכיחו שהמרחק (הקטן ביותר) בין מישורים $\{ax+by+cz=d_1\}$, $\{ax+by+cz=d_2\}$ נתון ע"י $\frac{|d_1-d_2|}{|(a,b,c)|}$.