חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 10.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. (א) עבור קבוצה חסומה $S \subset \mathbb{R}^n$ נגדיר *פונקציה אופיינית*, $\mathbb{I}_S(x) := \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$.

הוכיחו: $\mathbb{I}_S$ הינה אינטגרבילית אמ"מ S בעלת נפח. (ואז: $vol_n(S) = \int_S \mathbb{I}_S d^n\underline{x}$)

(ב) במקרים הבאים חשבו את $\int_S 1_S d^n\underline{x}$ או הוכיחו כי אינו קיים:

i. $S = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ii. $S = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ iii. $S = \{\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ג) הוכיחו: פונקציה לא חסומה אינה אינטגרבילית.

(ד) תהי $\mathbb{R}^n \supset \mathscr{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}$ אינטגבילית. הוכיחו: $\int_{\mathscr{D}} f(\underline{x}) d^n\underline{x} = vol_{n+1}\{(\underline{x}, x_{n+1}) | \ \underline{x} \in \mathscr{D}, \ 0 \leq x_{n+1} \leq f(\underline{x})\}$.

2. תהיינה $\mathbb{R}^n \supset \mathscr{D} \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$ אינטגרביליות ב $\mathscr{D}$. הוכיחו:

i. $\int_{\mathscr{D}} (f(\underline{x}) + g(\underline{x})) d^n\underline{x} = \int_{\mathscr{D}} f(\underline{x}) d^n\underline{x} + \int_{\mathscr{D}} g(\underline{x}) d^n\underline{x}$. ii. אם $c \leq f \leq C$ אז $c \cdot vol_n(\mathscr{D}_n) \leq \int_{\mathscr{D}} f(\underline{x}) d^n\underline{x} \leq C \cdot vol_n(\mathscr{D}_n)$.

iii. אם $f \leq g$ אז $\int_{\mathscr{D}} f(\underline{x}) d^n\underline{x} \leq \int_{\mathscr{D}} g(\underline{x}) d^n\underline{x}$. iv. $|f|$ הינה אינטגרבילית ומתקיים $|\int_{\mathscr{D}} f(\underline{x}) d^n\underline{x}| \leq \int_{\mathscr{D}} |f(\underline{x})| d^n\underline{x}$.

3. תהי $\mathbb{R}^n \supset \mathscr{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ אינטגרבילית ב $\mathscr{D}$. הוכיחו:

i. אם $vol_n(\mathscr{D}_n) = 0$ אז $\int_{\mathscr{D}} f(\underline{x}) d\underline{x} = 0$. ii. אם $f = 0$ פרט לקבוצת נפח אפס, אז $\int_{\mathscr{D}} f(\underline{x}) d\underline{x} = 0$.

4. (א) החליפו את סדר האינטגרציה: i. $\int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x,y) dx + \int_1^5 dx \int_0^{\sqrt{5-x}} f(x,y) dx$ ii. $\int_{-1}^1 dy \int_{arcsin(y)}^{\pi - arcsin(y)} f(x,y) dx$.

(ב) חשבו את האינטגרלים: i. $\int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt[4]{1-y^4}}^{\sqrt[4]{1-y^4}} y e^{x^2} dx$ ii. $\int_1^e dx \int_0^{ln(x)} \frac{dy}{e^y+1}$ iii. $\int_0^1 dy \int_0^{arccos(y)} \frac{dx}{sin(x)+10}$

(ג) החליפו את סדר האינטגרציה כך שתתאפשר אינטגרציה פנימית ובסוף יישאר אינטגרל במשתנה אחד:

i. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt[3]{x}} dy \int_{y^4}^{\sqrt[4]{y}} f(z) dz$ ii. $\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2} - x^2}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x^2}} dy \int_{\frac{\frac{\pi}{2} - x^2 - y^2}{2}}^{cos(x^2+y^2)} f(z) dz$.

5. חשבו את האינטגרלים: i. $\iint_{\mathscr{D}} (x^2 + y^2) dxdydz$, כאן $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^3$ חסום ע"י $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

ii. $\iint_{\mathscr{D}} y dxdydz$, $\mathscr{D} = \{\underline{x} \ | \ |x| \leq z, \ 0 \leq z \leq 1, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

6. נתבונן בפירמידה $P := \{\underline{x} | \ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1$ מתקיים: $\int_P \prod_{i=1}^n f(x_i) dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{n!} (\int_0^1 f(t) dt)^n$. היעזרו בנוסחה זאת כדי לחשב את נפח הפירמידה.