



חזו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 11.
(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. מצאו את השטחים של התחומים החסומים ע"י עקומות הבאות i. $\{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}$
 ii. $\{(x, y) \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\}$ (רמז: איך אפשר להעביר את העקום למעגל?)
 iii. $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = |\sin(n \cdot \arctan \frac{y}{x})|\}$, $n \in \mathbb{N}$, (רמז: לוודא בקוטביות כי התחום הוא פרח עם $2n$ עלי כותרת)

2. (א) הוכיחו שנפח נשמר תחת סיבובים, שיקופים והזזות. כלומר, אם $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x} + \vec{v}$, כאשר $A \cdot A^t = \mathbb{I}$, אז (עבור כל קבוצה בעלת נפח): $vol_n(f(S)) = vol_n(S)$

(ב) חשבו את הנפח של הגופים הבאים. תנסו לחשב בדרכים שונות.

- i. $\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, 0 \leq x < y, z \leq 0\}$ ii. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$
 iii. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq xy\}$ iv. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z^2 + y^2 < 1\}$
 v. $\{(x, y, z) \mid |x + 2y + 3z| + |2x + 3y + z| + |3x + y + 2z| \leq 1\}$ vi. הגוף החסום ע"י המשטח משאלה 3.iii של ת"ב 2.

3. (א) חשבו את האינטגרלים הבאים: i. $\iint \arctan \frac{y}{x} dx dy$ ii. $\iiint \sqrt{1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$
 $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq x\sqrt{3}\}$
 $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$

- iii. $\int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2}) dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (האם פונקציה $\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$ רציפה וחסומה בתחום האינטגרציה?)

- iv. $\iint x|y| dx dy$ v. $\iiint zye^{x+y^2} dx dy dz$ vi. $\iiint xyz dx dy dz$
 $\{x^2 \leq y \leq 2x^2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\}$
 $\{0 \leq z \leq 2, \frac{x}{3} \leq z \leq \frac{x}{2}, \frac{y^2}{4} \leq z \leq y^2\}$
 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} \leq 1$

4. נחשב את נפח הכדור ה- n מימדי, $Ball_R^{(n)}(0) \subset \mathbb{R}^n$. נגדיר היטל $Ball_R^{(2)}(0) \xrightarrow{\pi} Ball_R^{(n)}(0)$ ע"י $\pi(\underline{x}) = (x_{n-1}, x_n)$

- (א) עבור כל $(x_{n-1}, x_n) \in Ball_R^{(2)}(0)$ בדקו: $\pi^{-1}(x_{n-1}, x_n) = Ball_{\sqrt{R^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2}}^{(n-2)}(0) \times \{x_{n-1}\} \times \{x_n\}$

- (ב) הוכיחו (בעזרת Fubini): $vol_n Ball_R^{(n)}(0) = vol_{n-2} Ball_R^{(n-2)}(0) \cdot 2\pi \int_0^R (1 - (\frac{r}{R})^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr$

- (ג) קבלו את הנוסחה הרקורסיבית: $vol_n Ball_R^{(n)}(0) = \frac{2\pi R^2}{n} \cdot vol_{n-2} Ball_R^{(n-2)}(0)$

- (ד) קבלו נוסחאות מפורשות עבור $vol_{2k} Ball_R^{(2k)}(0)$ ו $vol_{2k+1} Ball_R^{(2k+1)}(0)$

- (ה) חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} vol_n Ball_R^{(n)}(0)$ ואת $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{vol_n Ball_R^{(n)}(0) - vol_{n-2} Ball_R^{(n-2)}(0)}{vol_n Ball_R^{(n)}(0)}$ עבור $R > 0$ ו $\epsilon > 0$ קבועים.

5. (א) חשבו את האינטגרלים: i. $\int_{\{x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}}\}} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$ ii. $\int_{(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)} |y| ds$

- (ב) יהי $C \subset \mathbb{R}^2$ מוגדר ע"י $r = r(\theta)$ (פרמטריזציה בקוטביות). הוכיחו: $\int_C f dC = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f \cdot \sqrt{(\partial_\theta r)^2 + r^2} d\theta$

- (ג) עבור אילו ערכים של $s > 0$ לספירלה $\{r(\theta) = \frac{1}{1+\theta^s}, 0 \leq \theta < \infty\}$ יש אורך סופי?