# פתרונות לדף 11

**1. א.** נחליף משתנים:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},$$

היעקוביאן של ההחלפה הוא:

$$\left|J(r,\theta)\right| = \left|\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}\right| = r.$$

נרשום את המשוואה של שפת התחום במשתנים החדשים:

$$\left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)^2 = 2a^2\left(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right),$$

כלומר

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta,$$

מכאן

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

כאשר $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ או $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}$ או $\frac{7\pi}{4} \le \theta \le 2\pi$.

מכאן השטח הרצוי הוא:

$$S = \iint_\Omega dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2\Big|_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} r^2\Big|_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta + a^2\int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{a^2}{2}\sin 2\theta\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} + \frac{a^2}{2}\sin 2\theta\Big|_{3\pi/4}^{5\pi/4} = 2a^2.$$

**ב.** נחליף משתנים

$$\begin{cases} x = ar^3\cos^3\theta \\ y = ar^3\sin^3\theta \end{cases}.$$

נחשב את היעקוביאן של ההחלפה:

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}3ar^2\cos^3\theta & -3ar^3\cos^2\theta\sin\theta\\ 3ar^2\sin^3\theta & 3ar^3\cos\theta\sin^2\theta\end{pmatrix}=9a^2r^5\cos^2\theta\sin^2\theta=\frac{9}{4}a^2r^5\sin^2 2\theta\ .$$

מכאן נקבל:

$$S=\iint_\Omega dA=\frac{9}{4}a^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\sin^2 2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\pi a^2\ .$$

**ג.** נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}.$$

נקבל את המשוואה:

$$r=|\sin n\theta|\ .$$

נסתפק בחישוב של עלה אחד (לא נשכח לכפול ב- $2n$), הנתון ע"י $0\le\theta\le\frac{\pi}{n}$:

$$S=2n\iint_\Omega dA=2n\int_0^{\pi/n}\int_0^{|\sin n\theta|} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=n\int_0^{\pi/n} r^2\Big|_0^{|\sin n\theta|}\mathrm{d}\theta=n\int_0^{\pi/n}\sin^2 n\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}(1-\cos2n\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\sin2n\theta\Big|_0^{\pi/n}=\frac{\pi}{2}\ .$$

**2. א.** השתמשו במשפט החלפת המשתנים, זכרו כי הדטרמיננטה של ההחלפה שווה ל- $\pm1$.

**ב. i.** נבצע החלפת המשתנים:

$$\begin{cases}x=a\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=c\rho\cos\varphi\end{cases}$$

כאשר

$$0\le\rho\le1,\quad \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi,\quad \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\ .$$

נחשב את היעקוביאן של ההחלפה:

$$, \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\det\begin{pmatrix} a\sin\varphi\cos\theta & -a\rho\sin\varphi\sin\theta & a\rho\cos\varphi\cos\theta \\ b\sin\varphi\sin\theta & b\rho\sin\varphi\cos\theta & b\rho\cos\varphi\sin\theta \\ c\rho\cos\varphi & 0 & -c\rho\sin\varphi \end{pmatrix}=-abc\rho^2\sin\varphi$$

מכאן הנפח המבוקש הוא:

$$abc\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\frac{abc}{3}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\varphi d\varphi d\theta=-\frac{abc}{3}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\cos\varphi\Big|_{\pi/2}^{\pi}d\theta=$$

$$.\ \frac{abc}{3}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}d\theta=\pi\frac{abc}{3}$$

**ii.** נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

כאשר

$$.\ 0\le r\le\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad -\sqrt{1-r^2}\le z\le\sqrt{1-r^2}$$

הנפח המבוקש הוא

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}rdzdrd\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}2r\sqrt{1-r^2}drd\theta=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}d\left(1-r^2\right)d\theta=$$

$$-\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\cos\theta}d\theta=-\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(1-\cos^2\theta\right)^{3/2}-1\right)d\theta=-\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left|\sin^3\theta\right|-1\right)d\theta=$$

$$-\frac{2}{3}\left[\int_{-\pi/2}^{0}\left(-\sin^3\theta-1\right)d\theta+\int_0^{\pi/2}\left(\sin^3\theta-1\right)d\theta\right]=\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{0}\left(\sin^3\theta+1\right)d\theta+\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^3\theta\right)d\theta=$$

$$\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{0}\sin^3\theta d\theta-\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta=\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{0}\sin^2\theta\sin\theta d\theta-\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\sin\theta d\theta=$$

$$\frac{2\pi}{3}-\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{0}\left(1-\cos^2\theta\right)d\cos\theta+\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\theta\right)d\cos\theta=$$

$$.\frac{2\pi}{3}+\left(-\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{2}{9}\cos^3\theta\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{0}+\left(\frac{2}{3}\cos\theta-\frac{2}{9}\cos^3\theta\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}$$

**iii.** נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

כאשר

$$.0\le r\le R,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad |z|\le r^2\cos\theta\sin\theta$$

הנפח המבוקש הוא:

$$.\int_0^R\int_0^{\pi/2}\int_0^{r^2\cos\theta\sin\theta} rdzd\theta dr+\int_0^R\int_\pi^{3\pi/2}\int_0^{r^2\cos\theta\sin\theta} rdzd\theta dr$$

נחשב אחד מן האינטגרלים:

$$\int_0^R\int_0^{\pi/2}\int_0^{r^2\cos\theta\sin\theta} rdzd\theta dr=\int_0^R\int_0^{\pi/2} r^3\cos\theta\sin\theta d\theta dr=\frac{1}{2}\int_0^R\int_0^{\pi/2} r^3\sin 2\theta d\theta dr=$$

$$.-\frac{1}{4}\int_0^R r^3\cos 2\theta\Big|_0^{\pi/2} d\theta dr=\frac{1}{2}\int_0^R r^3 dr=\frac{1}{8}R^4$$

**vi.** הנפח הרצוי שווה ל-

$$.\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dzdxdy=2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}\,dxdy=4\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=\frac{16}{3}$$

**v.** נבצע החלפת המשתנים:

$$.\begin{cases} u=x+2y+3z \\ v=2x+3y+z \\ w=3x+y+2z \end{cases}$$

נחשב:

$$, \det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\det\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}=-18$$

לכן

$$. \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-\frac{1}{18}$$

הנפח המבוקש הוא (המקדם $8$ מופיע בגלל שהאינטגרל הבא מחשב את שמינית הנפח):

$$\frac{8}{18}\int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-u-v}dwdvdu=\frac{4}{9}\int_0^1\int_0^{1-u}(1-u-v)dvdu=\frac{4}{9}\int_0^1\left(v-uv-\frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-u}du=$$

$$. \frac{4}{9}\int_0^1\left(v-uv-\frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-u}du=\frac{4}{9}\int_0^1\left(\frac{u^2}{2}-u+\frac{1}{2}\right)du=\left(\frac{2}{27}u^3-\frac{2}{9}u^2+\frac{2}{9}u\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{27}$$

**vi.** ע"פ סעיף א' הנפח של הגוף הנתון שווה לנפח של גוף הסיבוב של

$$(x-5)^2+z^2=1$$

סביב ציר $z$. נעבור לקואורדינטות הגליליות:

$$, \begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=z\end{cases}$$

נשים לב כי

$$, 4=5-1\le r\le 5+1=6$$

$$, 0\le\theta\le 2\pi$$

$$. -\sqrt{1-(r-5)^2}\le z\le\sqrt{1-(r-5)^2}$$

כזכור היעקוביאן של השינוי הזה שווה ל-

$$. J=r$$

הנפח המבוקש שווה ל-

$$\int_0^{2\pi}\int_4^6\int_{-\sqrt{1-(r-5)^2}}^{\sqrt{1-(r-5)^2}} rdzdrd\theta = 2\pi\int_4^6 2r\sqrt{1-(r-5)^2}\,dr =$$

$$.\ 2\pi\int_4^6 2(r-5)\sqrt{1-(r-5)^2}\,dr + 20\pi\int_4^6\sqrt{1-(r-5)^2}\,dr$$

נחשב את האינטגרלים שקיבלנו עתה בנפרד.

$$.\ -2\pi\int_4^6\sqrt{1-(r-5)^2}\,d\left[1-(r-5)^2\right] = -\frac{4}{3}\pi\left(1-(r-5)^2\right)^{3/2}\Big|_4^6 = -\frac{4}{3}\pi\left(1-(r-5)^2\right)^{3/2}\Big|_4^6 = 0$$

עכשיו נחשב את האינטגרל השני:

$$20\pi\int_4^6\sqrt{1-(r-R)^2}\,dr = \begin{bmatrix} r-5=\sin t \\ dr=\cos tdr \end{bmatrix} = 20\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 tdr =$$

$$.\ 10\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = 10\pi^2$$

הערה: ניתן לחשב את הנפח בלפחות עוד שתי דרכים. הראשונה – ע"י המעבר לקואורדינטות כדוריות:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

כאשר (כאן מחשבים רק את המחצית העליונה של הטורוס, כלומר $z\ge 0$)

$$.\ 5\sin\varphi-\sqrt{1-25\cos^2\varphi}\le\rho\le 5\sin\varphi+\sqrt{1-25\cos^2\varphi},\quad \arccos\frac{1}{5}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

ניתן אף לחשב ע"י המעבר לקורורדינטות הבאות:

$$\begin{cases} x=(5+r\cos\alpha)\cos\theta \\ y=(5+r\cos\alpha)\sin\theta \\ z=r\sin\alpha \end{cases}$$

כאשר

$$.\ 0\le r\le 1,\quad 0\le\alpha\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

נחשב את היעקוביאן של ההחלפה:

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\alpha)}=\det\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\theta & -(5+r\cos\alpha)\sin\theta & -r\sin\alpha\cos\theta\\ \cos\alpha\sin\theta & (5+r\cos\alpha)\cos\theta & -r\sin\alpha\sin\theta\\ \sin\alpha & 0 & r\cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$.\ r(5+r\cos\alpha)\det\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\theta & -\sin\theta & -\sin\alpha\cos\theta\\ \cos\alpha\sin\theta & \cos\theta & -\sin\alpha\sin\theta\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}=r(5+r\cos\alpha)$$

נשים לב כי בתחום הנידון $r(R+r\cos\alpha)>0$ , שהרי $5+r\cos\alpha>5-1>0$ .

מכאן הנפח המבוקש הוא:

$$V=\iiint_E dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(5+r\cos\alpha)\,drd\alpha d\theta=2\pi\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(5+r\cos\alpha)\,drd\alpha=$$

$$.\ 2\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{5r^2}{2}+\frac{r^3\cos\alpha}{3}\right)\Bigg|_0^1 d\alpha=2\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}+\frac{\cos\alpha}{3}\right)d\alpha=10\pi^2$$

**3. i.** נסמן את תחום האינטגרציה ב- $\Omega$ , כלומר

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\le x^2+y^2\le 4, x\le y\le\sqrt{3}x\right\}$$

$$.\ \iint_\Omega \arctan\frac{y}{x}\,dA\underset{\text{polar coordinates}}{=}\int_1^2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\theta r\,d\theta dr=\frac{1}{2}\int_1^2\theta^2 r\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}dr=\frac{7}{288}\pi^2\int_1^2 r\,dr=\frac{7}{576}\pi^2r^2\Big|_1^2=\frac{7}{192}\pi^2$$

**ii.** נבצע החלפת המשתנים:

$$\begin{cases}x=a\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=c\rho\cos\varphi\end{cases}$$

כאשר

$$.\ 0\le\rho\le1,\quad 0\le\varphi\le\pi,\quad 0\le\theta\le2\pi$$

נחשב את היעקוביאן של ההחלפה:

$$.\ \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\det\begin{pmatrix}a\sin\varphi\cos\theta & -a\rho\sin\varphi\sin\theta & a\rho\cos\varphi\cos\theta\\ b\sin\varphi\sin\theta & b\rho\sin\varphi\cos\theta & b\rho\cos\varphi\sin\theta\\ c\rho\cos\varphi & 0 & -c\rho\sin\varphi\end{pmatrix}=-abc\rho^2\sin\varphi$$

נסמן:

$$. E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$$

מתקיים:

$$\iiint_E\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2}}dV=abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^2\sin\varphi\sqrt{1-\rho^3}\,d\rho d\varphi d\theta=$$

$$2\pi abc\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^2\sin\varphi\sqrt{1-\rho^3}\,d\rho d\varphi=-\frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\pi}\int_0^{1}\sin\varphi\sqrt{1-\rho^3}\,d\left(1-\rho^3\right)d\varphi=$$

$$.-\pi abc\int_0^{\pi}\sin\varphi\left(1-\rho^3\right)^{3/2}\Big|_0^1 d\varphi=\pi abc\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=-\pi abc\cos\varphi\Big|_0^{\pi}=2\pi abc$$

**iii.** נבצע החלפת המשתנים:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

כאשר

$$.0\le\rho\le r,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

מכאן

$$.\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\sin\rho d\rho d\theta=2\pi\int_0^{r}\sin\rho d\rho=-2\pi\cos\theta\Big|_0^{r}=2\pi-2\pi\cos r$$

**iv.** נסמן:

$$.\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2\le y\le 2x^2,\frac{1}{x}\le y\le\frac{2}{x}\right\}$$

נשים לב כי בתחום הנידון $y>0$ , לכן

$$.x|y|=xy$$

נבצע החלפת המשתנים:

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} \\ v = xy \end{cases}$$

כאשר

$$.1 \le u \le 2,\quad 1 \le v \le 2$$

נחשב את היעקוביאן של ההחלפה:

$$, \det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} -2\dfrac{y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ y & x \end{pmatrix} = -3\frac{y}{x^2} = -3u$$

לכן

$$, \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{3u}$$

מכאן

$$. \iint_{\Omega} xydA = \frac{1}{3}\int_1^2\int_1^2 \frac{v}{u}dvdu = \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{v^2}{u}\Big|_1^2 du = \frac{1}{2}\int_1^2\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^2 = \ln\sqrt{2}$$

**v.** נסמן את תחום האינטגרציה ב- $E$. מתקיים:

$$\iiint_E zye^{x+y^2}dV = \int_0^2\int_{2z}^{3z}\int_{2\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} zye^{x+y^2}dydxdz =$$

$$\int_0^2\int_{2z}^{3z} e^x ze^{y^2}\Big|_{\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} dxdz = \int_0^2\int_{2z}^{3z} e^x ze^{y^2}\Big|_{\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} dxdz = \int_0^2\int_{2z}^{3z} e^x z\left(e^{4z}-e^z\right)dxdz =$$

$$. \int_0^2 z\left(e^{4z}-e^z\right)\left(e^{3z}-e^{2z}\right)dz = \int_0^2 z\left(e^{7z}-e^{6z}-e^{4z}+e^{3z}\right)dz = \cdots = \text{something}$$

**vi.** נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{cases} x = a\dfrac{u^2}{2} \\ y = b\dfrac{v^2}{2} \\ z = c\dfrac{w^2}{2} \end{cases}$$

כאשר

$$.\ |u|+|v|+|w| \le 4$$

נחשב את היעקוביאן של ההחלפה:

$$.\ \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} au & 0 & 0 \\ 0 & bv & 0 \\ 0 & 0 & cw \end{pmatrix} = abcuvw$$

נסמן את תחום האינטגרציה ב- $E$. מתקבלים שמונה אינטגרלים בהתאם לסימן של האינטגרנד באוקטנט העינייני. נחשב רק אחד מהם הנתון ע"י $u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0$:

$$.\ \frac{a^2b^2c^2}{8}\int_0^4\int_0^{4-u}\int_0^{4-u-v} u^3v^3w^3\,dw\,dv\,du = \cdots = \text{something}$$

**4. א.** יהא $(x_{n-1}, x_n) \in B_R^{(2)}(\mathbf{0})$. מתקיים:

$$.\ x_{n-1}^2 + x_n^2 < R^2$$

ע"פ ההגדרה של $\pi$ מתקיים:

$$\pi^{-1}(x_{n-1}, x_n) = \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in B_R^{(n)}(\mathbf{0}) : (y_{n-1}, y_n) = (x_{n-1}, x_n) \right\}$$

כלומר

$$,\ y_1^2 + \cdots + y_{n-2}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 < R^2$$

מכאן

$$.\ y_1^2 + \cdots + y_{n-2}^2 < R^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2$$

נשים לב כי $R^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2 > 0$. הראינו כי

$$. \pi^{-1}\left(x_{n-1}, x_n\right) \subseteq B^{(n-2)}_{\sqrt{R^2-x_{n-1}^2-x_n^2}}(\mathbf{0}) \times \left\{x_{n-1}\right\} \times \left\{x_n\right\}$$

יהא $\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\right) \in B^{(n-2)}_{\sqrt{R^2-x_{n-1}^2-x_n^2}}(\mathbf{0}) \times \left\{x_{n-1}\right\} \times \left\{x_n\right\}$ , נשים לב כי

$$, x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 < R^2 - x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 = R^2$$

לכן $\mathbf{x} \in \mathrm{Dom}\pi$ , בבירור $\pi(\mathbf{x}) = \left(x_{n-1}, x_n\right)$ , כלומר

$$\pi\left(B^{(n-2)}_{\sqrt{R^2-x_{n-1}^2-x_n^2}}(\mathbf{0}) \times \left\{x_{n-1}\right\} \times \left\{x_n\right\}\right) = \left\{\left(x_{n-1}, x_n\right)\right\}$$

ולכן

$$. B^{(n-2)}_{\sqrt{R^2-x_{n-1}^2-x_n^2}}(\mathbf{0}) \times \left\{x_{n-1}\right\} \times \left\{x_n\right\} \subseteq \pi^{-1}\left(x_{n-1}, x_n\right)$$

**ב. ו- ג.** נראה תחילה כי

$$. \mathrm{vol}_n B_R^{(n)}(\mathbf{0}) = R^n \mathrm{vol}_n B_1^{(n)}(\mathbf{0})$$

מתקיים

$$. \mathrm{vol}_n B_R^{(n)}(\mathbf{0}) = \int\limits_{x_1^2+\cdots+x_n^2 \le R^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

נבצע החלפת המשתנים:

$$. x_i = R y_i, \quad 1 \le i \le n$$

לא קשה להשתכנע כי היעקוביאן של ההחלפה הוא $R^n$ , לכן ע"פ משפט החלפת המשתנים

$$. \mathrm{vol}_n B_R^{(n)}(\mathbf{0}) = \int\limits_{x_1^2+\cdots+x_n^2 \le R^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{x_1^2+\cdots+x_n^2 \le 1} R^n dy_1 dy_2 \ldots dy_n = R^n \mathrm{vol}_n B_1^{(n)}(\mathbf{0})$$

לכן, ממה שראינו עתה, מתקיים

$$\mathrm{vol}_n B_R^{(n)}(\mathbf{0}) = \int\limits_{B_R^{(n)}(\mathbf{0})} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \iint\limits_{x_{n-1}^2+x_n^2 \le R^2} \left(\int\limits_{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2 \le R^2 - x_{n-1}^2 + x_n^2} \cdots \int dx_1 \ldots dx_{n-2}\right) dx_{n-1} dx_n =$$

$$\iint\limits_{x_{n-1}^2+x_n^2 \le R^2} \mathrm{vol}_{n-2} B^{(n-2)}_{\sqrt{R^2-x_{n-1}^2-x_n^2}}(\mathbf{0}) dx_{n-1} dx_n = \iint\limits_{x_{n-1}^2+x_n^2 \le R^2} \left(R^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2\right)^{n-2} \mathrm{vol}_{n-2} B_1^{(n-2)}(\mathbf{0}) dx_{n-1} dx_n =$$

$$\mathrm{vol}_{n-2}B_1^{(n-2)}(\mathbf{0})\iint\limits_{x_{n-1}^2+x_n^2\le R^2}\left(R^2-x_{n-1}^2-x_n^2\right)^{(n-2)/2}dx_{n-1}dx_n=2\pi\mathrm{vol}_{n-2}B_1^{(n-2)}(\mathbf{0})\int_0^R r\left(R^2-r^2\right)^{(n-2)/2}dr=$$

$$-\pi\mathrm{vol}_{n-2}B_1^{(n-2)}(\mathbf{0})\int_0^R\left(R^2-r^2\right)^{(n-2)/2}d\left(R^2-r^2\right)=-\frac{2\pi}{n}\mathrm{vol}_{n-2}B_1^{(n-2)}(\mathbf{0})\left(R^2-r^2\right)^{n/2}\Big|_0^R=$$

$$.\ \frac{2\pi R^n}{n}\mathrm{vol}_{n-2}B_1^{(n-2)}(\mathbf{0})$$

**ד.** עבור $n=1$ מקבלים כי $\mathrm{vol}_1B_1^{(1)}(\mathbf{0})=2$ ואילו עבור $n=2$ מקבלים כי $\mathrm{vol}_2B_1^{(2)}(\mathbf{0})=\pi$ , לכן

$$\mathrm{vol}_3B_R^{(3)}(\mathbf{0})=\frac{4\pi R^3}{3}$$

ו-

$$.\ \mathrm{vol}_4B_R^{(4)}(\mathbf{0})=\frac{\pi^2R^4}{2}$$

מתקיים:

$$\mathrm{vol}_{2k+1}B_R^{(2k+1)}(\mathbf{0})=\frac{2\pi R^{2k+1}}{2k+1}\mathrm{vol}_{2k-1}B_1^{(2k-1)}(\mathbf{0})=$$

$$.\ \frac{2\pi R^{2k+1}}{2k+1}\frac{2\pi}{2k-1}\mathrm{vol}_{2k-3}B_1^{(2k-3)}(\mathbf{0})=\cdots=2\frac{(2\pi)^k R^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

בדומה נקבל כי

$$\mathrm{vol}_{2k}B_R^{(2k)}(\mathbf{0})=\frac{2\pi R^{2k}}{2k}\mathrm{vol}_{2k-2}B_1^{(2k-2)}(\mathbf{0})=$$

$$.\ \frac{2\pi R^{2k}}{2k}\frac{2\pi}{2k-2}\mathrm{vol}_{2k-4}B_1^{(2k-4)}(\mathbf{0})=\cdots=\pi\frac{2(2\pi)^{k-1}R^{2k}}{(2k)!!}=\frac{\pi^kR^{2k}}{k!}$$

**ה.** מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{vol}_nB_R^{(n)}(\mathbf{0})=0$$

ו-

$$.\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{vol}_n B_R^{(n)}(\mathbf{0})-\mathrm{vol}_n B_{R-\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{0})}{\mathrm{vol}_n B_R^{(n)}(\mathbf{0})}\underset{n=2k}{=}\lim_{k\to\infty}\frac{R^{2k}-(R-\varepsilon)^{2k}}{R^{2k}}=1$$

**5. א. i.** נרשום פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$$

כאשר $0\le t\le 2\pi$. אזי

$$\int\limits_{x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}}\left(x^{4/3}+y^{4/3}\right)dl=a^{4/3}\int_0^{2\pi}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\cos^4 t\sin^2 t}\,dt=$$

$$3a^{7/3}\int_0^{2\pi}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\left|\cos t\sin t\right|dt=$$

$$3a^{7/3}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\cos t\sin t\,dt-3a^{7/3}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\cos t\sin t\,dt+$$

$$.3a^{7/3}\int_{\pi}^{3\pi/2}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\cos t\sin t\,dt-3a^{7/3}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\cos t\sin t\,dt$$

נחשב אחד מהאינטגרלים:

$$\int_0^{\pi/2}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\cos t\sin t\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos^5 t\sin t\,dt+\int_0^{\pi/2}\cos t\sin^5 t\,dt=$$

$$.-\int_0^{\pi/2}\cos^5 t\,d(\cos t)+\int_0^{\pi/2}\sin^5 t\,d(\sin t)=\left(-\frac{1}{6}\cos^6 t+\frac{1}{6}\sin^6 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}$$

**ii.** נרשום פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a\cos t}{1+\sin^2 t} \\ y=\dfrac{a\sin t\cos t}{1+\sin^2 t} \end{cases}$$

כאשר $0\le t\le 2\pi$. מכאן:

$$\int\limits_{(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2)} |y|\, dl =$$

נרשום פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2t}\cos t \\ y = a\sqrt{\cos 2t}\sin t \end{cases}$$

כאשר $0 \le t \le 2\pi$.

נסמן:

$$.\ \gamma(t) = \left(a\sqrt{\cos 2t}\cos t, a\sqrt{\cos 2t}\sin t\right)$$

מתקיים:

$$,\ \gamma'(t) = a\left(\frac{-\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\cos t - \sin t\sqrt{\cos 2t}, \frac{-\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\sin t + \cos t\sqrt{\cos 2t}\right)$$

מכאן

$$\|\gamma'(t)\| = a\sqrt{\left(\frac{-\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\cos t - \sin t\sqrt{\cos 2t}\right)^2 + \left(\frac{-\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\sin t + \cos t\sqrt{\cos 2t}\right)^2} =$$

$$a\sqrt{\frac{\sin^2 2t}{\cos 2t} + \cos 2t} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}$$

מתקיים:

$$\int\limits_{(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2)} |y|\, dl = a\int_0^{2\pi} \frac{\left|a\sqrt{\cos 2t}\sin t\right|}{\sqrt{\cos 2t}}\, dt = a^2\int_0^{2\pi} |\sin t|\, dt =$$

$$.\ a^2\int_0^{\pi} \sin t dt - a^2\int_{\pi}^{2\pi} \sin t dt = a^2 \cos t\Big|_0^{\pi} - a^2 \cos t\Big|_{\pi}^{2\pi} = -4a^2$$

**ב.** נרשום פרמטריזציה:

$$.\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

נסמן:

$$\gamma(t)=\left(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta\right)$$

מתקיים:

$$,\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}$$

לכן

$$.\int_C fdl=a\int_{\theta_1}^{\theta_2} f\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}d\theta$$

**ג.** נרשום פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\cos t}{1+t^s} \\ y=\dfrac{\sin t}{1+t^s} \end{cases}$$

כאשר $0\le t<\infty$

נסמן:

$$.\,\gamma(t)=\left(\frac{\cos t}{1+t^s},\frac{\sin t}{1+t^s}\right)$$

ע"פ סעיף ב'

$$.\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{\left(\frac{1}{1+t^s}\right)'^2+\left(\frac{1}{1+t^s}\right)^2}=\sqrt{\frac{s^2t^{2s-2}}{\left(1+t^s\right)^4}+\frac{1}{\left(1+t^s\right)^2}}=\frac{\sqrt{1+2t^s+t^{2s}+s^2t^{2s-2}}}{\left(1+t^s\right)^2}$$

לכן "אורכה" $L$ של הספירלה נתון ע"י

$$,\,L=\int_0^\infty\frac{\sqrt{1+2t^s+t^{2s}+s^2t^{2s-2}}}{\left(1+t^s\right)^2}dt$$

האינטגרל האחרון מתכנס עבור $s>1$.