חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 12.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. יהי $C\subset\mathbb{R}^3$ עקום שמוגדר בקוטביות: $\{r=r(\phi),\ \theta=\theta(\phi)|\ \phi\in[\phi_0,\phi_1]\}$, כאן θ- זווית עם ציר $\hat{z}$.
הוכיחו: $\int_C f\cdot dC=\int_{\phi_0}^{\phi_1} f\cdot\sqrt{(\partial_\phi r)^2+r^2(\partial_\phi\theta)^2+r^2sin^2(\theta)}d\phi$.

2. במקרים הבאים חשבו את $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{C}$:
   i. $\vec{F}(\underline{x})=(x_1,x_2^2,\dots,x_n^n)$, $C=\{(sin(t),sin^2(t),\dots,sin^n(t))|\ t\in[0,\pi]\}$.
   ii. $\vec{F}=\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$, $C=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}\subset\mathbb{R}^2$, נגד כיוון השעון.
   iii. $\vec{F}=\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$, C נתונה בקוטביות ע"י $r(\theta)=\frac{1}{1-sin(\theta)}$ מנקודה $(\sqrt{3},1)$ לנקודה $(-\sqrt{3},1)$
   iv. $\int_{\left\{\substack{x^2+y^2+z^2=1,\\ y=-x,\ \ z>0}\right\}}(z^2dx+3y^2dy-x^2dz)$ כיוון העקומה מתאים לתנועה מ $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$ ל $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$.

3. (א) נקבע עקום עם פרמטריזציה $[a,b]\xrightarrow{\underline{x}(t)}C\subset\mathbb{R}^n$, כאן $\underline{x}(t)$ פונקציה C^1. נניח ש $\vec{F}=grad(f)$, עבור f פונקציה C^1 בסביבה של C. הוכיחו נוסחת Newton-Leibnitz: $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{C}=f(\underline{x}(b))-f(\underline{x}(a))$.
   (ב) חשבו $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{C}$ עבור $\vec{F}=(yz,xz,xy)$ ו $C=\{y=e^{x^2},\ z=sin(x^3)|\ x\in[0,1]\}$.
   (ג) יהי $n\in\mathbb{Z}$. מצאו מסילה γ סגורה (מכוונת) שלא עוברת דרך הראשית, שעבורה $\oint_\gamma\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=2\pi n$.
   (ד) הוכיחו/הפריכו: אם שדה וקטורי $\vec{F}$ לא רציף ב $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ אז $\oint_{||\underline{x}||=\epsilon}\vec{F}d\vec{C}\neq 0$.
   (ה) תהי $\mathbb{R}_{>0}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו $C\subset\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ מסילה סגורה וחלקה למקוטעין.
   הוכיחו: $\oint_C g(x^2+y^2)\big(xdx+ydy\big)=0$.
   (ו) מצאו עקומה סגורה וחלקה למקוטעין C עבורה האינטגרל $\oint\limits_C(\frac{x^2y}{4}+\frac{y^3}{3})dx+xdy$ מקבל את הערך הגדול ביותר.

4. (א) יהי $\mathscr{D}\subset\mathbb{R}^2$ תחום פתוח וחסום כך ש $\partial\mathscr{D}$ הינו עקום בעל אורינטציה חיובית.
   הוכיחו: $vol_2(\mathscr{D})=\oint_{\partial\mathscr{D}}xdy=\oint_{\partial\mathscr{D}}(-y)dx=\oint_{\partial\mathscr{D}}\frac{xdy-ydx}{2}$.
   (ב) השתמשו בנוסחה זו כדי לחשב את השטח החסום ע"י העקומות:
   i. $\{|\frac{x}{a}|^{\frac{2}{p}}+|\frac{y}{b}|^{\frac{2}{p}}=1\}$ עבור $p=1,2,3$ ii. $\{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\}$,
   iii. $\Big\{\vec{r}(t)=(t^2-1)\hat{x}+t(t^2-1)\hat{y},\quad t\in[-1,1]\Big\}$. בדקו גם שהעקום הינו חלק מהעקום $\{y^2=x^2+x^3\}$.

5. במקרים הבאים המשטח הנתון בצורה פרמטרית. קבלו את המשוואה שלו, ציירו אותו, חשבו את הנורמל, $\partial_s\vec{r}\times\partial_t\vec{r}$.
   (א) $\vec{r}=\{(x,y,f(x,y))\}$, עבור $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}$, C^1. (הנורמל כלפי מעלה)
   (ב) $\vec{r}=(R\cdot sin(\theta)cos(\phi),R\cdot sin(\theta)sin(\phi),R\cdot cos(\theta))$, $\phi\in[0,2\pi]$, $\theta\in[0,\pi]$, $R>r$, (הנורמל חיצוני).
   (ג) $\vec{r}(\phi_1,\phi_2)=\big((R+rsin(\phi_1))cos(\phi_2),(R+rsin(\phi_1))sin(\phi_2),rcos(\phi_1)\big)$, $\phi_1,\phi_2\in[0,2\pi]$.
   (הנורמל חיצוני) (כאן $||\partial_{\phi_1}\vec{r}\times\partial_{\phi_2}\vec{r}||=r(R+rsin(\phi_1))$.)