① $C\subseteq\mathbb{R}^3$ - עקום נתון ע"י

$$r=r(\varphi),\quad \theta=\theta(\varphi)$$

בקואורדינטות כדוריות (פולריות ב-$\mathbb{R}^3$)

הוכיחו כי

$$\int_C f\,dl=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\cdot\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\sin^2\theta}\;d\varphi$$

פתרון:

$$x(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi\cdot\sin(\theta(\varphi))$$
$$y(\varphi)=r(\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot\sin(\theta(\varphi))$$
$$z(\varphi)=r(\varphi)\cdot\cos(\theta(\varphi))$$

$$x'(\varphi)=r'(\varphi)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta+r(\varphi)\cdot(-\sin\varphi)\cdot\sin\theta+r(\varphi)\cos\varphi\cdot\cos(\theta)\cdot\theta'$$
$$y'(\varphi)=r'(\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta+r(\varphi)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta+r(\varphi)\sin\varphi\cdot\cos(\theta)\cdot\theta'$$
$$z'(\varphi)=r'(\varphi)\cdot\cos\theta+r(\varphi)\cdot(-\sin\theta)\cdot\theta'$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=[r'(\varphi)]^2\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta+[r'(\varphi)]^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta$$
$$+[r'(\varphi)]^2\cdot\cos^2\theta+r^2(\varphi)\cdot\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta+r^2(\varphi)\cdot\cos^2\varphi\sin^2\theta$$
$$+r^2(\varphi)\cdot\sin^2\theta\,(\theta')^2+r^2(\varphi)\cdot\cos^2\varphi\cdot\cos^2\theta\cdot(\theta')^2$$
$$+r^2(\varphi)\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos^2\theta\cdot(\theta')^2=$$
$$=[r'(\varphi)]^2+r^2[\theta'(\varphi)]^2+r^2\sin^2\theta$$

לכן

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\sin^2\theta}\;d\varphi$$

(2) חשבו $\int_C F\cdot dC$

(i)

$$F(x)=(x_1, x_2^2, \dots, x_n^n)$$

$$C=\{(\sin t, \sin^2 t, \dots, \sin^n t)\}$$
$$t\in[0,\pi]$$

פתרון:

סימון – $\gamma(t)=(\sin t, \sin^2 t, \dots, \sin^n t)$

$$\gamma'(t)=(\cos t, 2\sin t\cdot\cos t, n\cdot\sin^{(n-1)}t\cdot\cos t)$$

$$F(\gamma(t))=(\sin t, \sin^4 t, \dots, \sin^{n^2}(t))$$

$$\int_C F dC=\int_0^\pi F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt =$$

$$=\int_0^\pi(\sin t\cdot\cos t+2\sin^3 t\cos t+\dots+n\cdot\sin^{n^2+n-1}(t)\cdot\cos t)dt$$

$$=\left(+\frac{\sin^2 t}{2}+2\cdot\frac{\sin^4(t)}{4}+\dots+n\cdot\frac{\sin^{n^2+n}(t)}{n^2+n}\right)\Big|_0^\pi=0$$

ii

$$F = \frac{(-y, x)}{x^2+y^2}$$

$$C = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

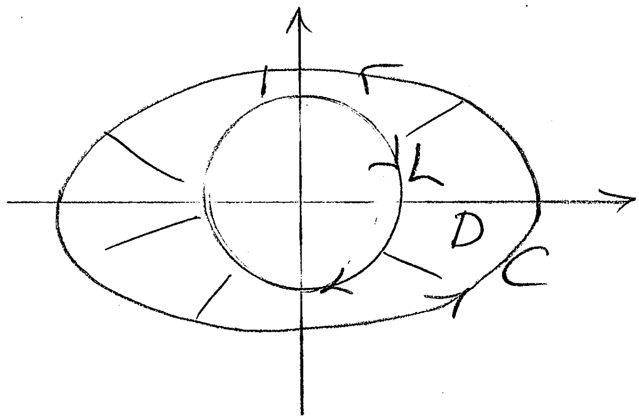
נגד כיוון השעון

פתרון:

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



נסמן תחום D - מרובה קשר עם
שפה חיצונית C נגד כיוון השעון
ושפה פנימית L (מעגל היחידה עם כיוון
השעון)

נשתמש במשפט גרין עבור תחום מרובה
קשר

$$\iint_D \underbrace{(Q'_x - P'_y)}_{=0}\, dx\,dy = \oint_C P\,dx + Q\,dy + \oint_L P\,dx + Q\,dy$$

כאשר על C כיוון חיובי ועל L כיוון שלילי.
ולכן מקבלים ש-

$$\oint_C F\,dr = \oint_L F\,dr$$ באותו כיוון

לכן נעשה חישוב של האינטגרל לפי
L- מעגל היחידה

$$x^2+y^2=1$$

$$x=\cos t$$
$$y=\sin t\,, \quad t\in[0,2\pi]$$

$$\oint_L \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t}{1}\,dt=2\pi$$

לכן

$$\oint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=2\pi$$

כיוון חיובי

$$F=\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$$

לפי

$$C=\left\{r(\theta)=\frac{1}{1-\sin\theta}\right\}$$

מנק' $(\sqrt{3},1)$ לנק' $(-\sqrt{3},1)$

פתרון:

בדומה לתרגיל 2.ii מוכיחים שעבור F מתקיים

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

נתבונן במסלול

$$r=\frac{1}{1-\sin\theta} \Rightarrow r\cdot(1-\sin\theta)=1 \Rightarrow$$

$$r-r\sin\theta=1 \Rightarrow x^2+y^2=(1+y)^2$$

$$\Downarrow$$

$$r^2=(1+y)^2$$

לכן מתקיים

$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ ← פרבולה

נגדיר תחום

$$D=\{\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y): x=0, y\geq 0\}$$

D- פשוט קשר ושם $P,Q\in C^1$ בתחום D ומתקיים $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

ולכן F שדה משמר בתחום D ולכן ניתן לבחור מסילה אחרת בתחום D. נקח מעגל

$$x^2+y^2=4$$

בין הנק' $(\sqrt{3},1)$, $(-\sqrt{3},1)$

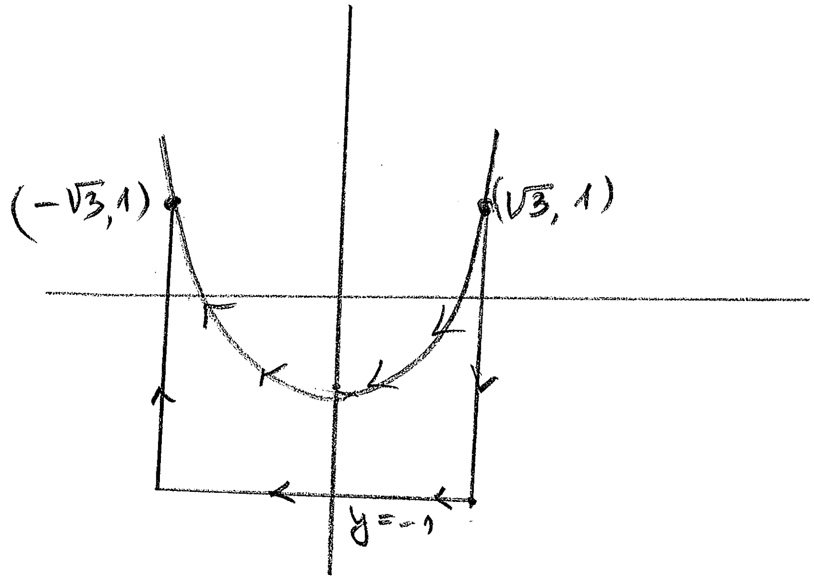
ולכן F שדה משמר בתחום D ולכן
ניתן לבחור מסילה אחרת בתחום D

$L = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

$\gamma_1 : \{(x,y) : x = \sqrt{3},\ -1 \le y \le 1\}$

$\gamma_2 : \{(x,y) : y = -1,\ -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}\}$

$\gamma_3 = \{(x,y) \mid x = -\sqrt{3},\ -1 \le y \le 1\}$



$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_{\gamma_1} F\,dr + \int_{\gamma_2} F\,dr + \int_{\gamma_3} F\,dr =$$

$$= \int_1^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3+y^2}\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{-1}^{1} \frac{-\sqrt{3}}{3+y^2}\,dy =$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_1^{-1} + \arctan(x)\Big|_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}}$$

$$= 2\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan(-\sqrt{3})$$
$$- \arctan(\sqrt{3}) = -4 \cdot \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$$

iv

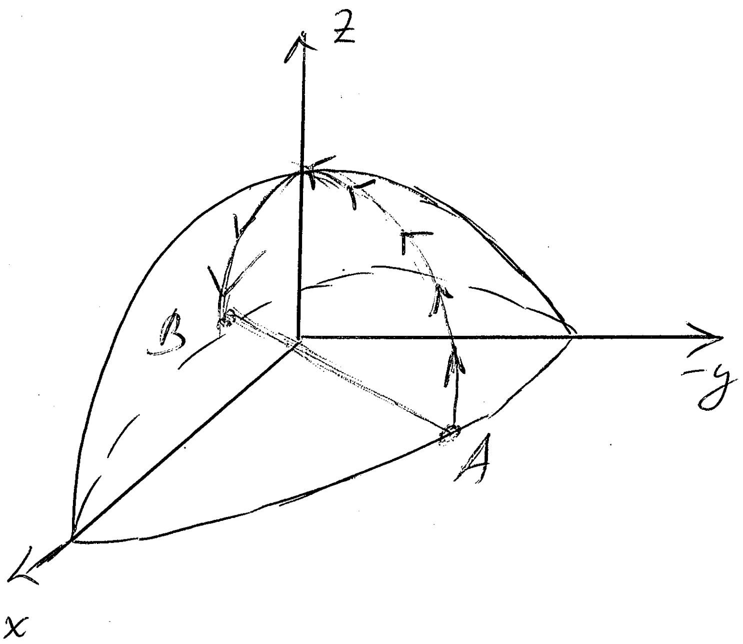
$$\int_L z^2dx+3y^2dy-x^2dz$$

$$L:\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2+z^2=1\\ y=-x\ ,\ z>0\end{array}\right\}$$

בכיוון מנק' $A(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0)$ עד $B(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0)$

פתרון:

נמצא את ההצגה הפרמטרית של L



$y=-x$

$\Downarrow$

$2x^2+z^2=1$

נקבל

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{\sqrt2}\cos t\\ z=\sin t\\ y=-\frac{1}{\sqrt2}\cos t\end{array}\right.\ ,\ t\in[0,\pi]$$

$$\int_L F\,d\gamma=\int_0^{\pi}\Big[\sin^2t\cdot\frac{1}{\sqrt2}(-\sin t)+3\left(-\frac{1}{\sqrt2}\cos t\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt2}\sin t$$

$$-\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos t\right)^2\cdot\cos t}_{=0}\Big]dt=-\frac{1}{6}\sqrt2$$

$C \subset \mathbb{R}^n$ - עקום רגל: פרמטריזציה

$$[a,b] \xrightarrow{\bar{x}(t)} C$$

כאשר $\bar{x}(t) \in C^1$

נניח ש- $\bar{F} = \nabla f$, $f \in C^1$

הוכיחו: כי

$$\int_C \bar{F}\, d\bar{c} = f(x(b)) - f(x(a))$$

<u>פתרון</u>

$$C: \gamma(t) = (x(t), y(t)) \ , \ t \in [a,b]$$

$$\int_C F\, dc = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$$

נתבונן בהרכבה

$$F \circ \gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$[F(\gamma(t))]' = \nabla F(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

כלומר קיימת- פונק' קדומה וניתן
להשתמש בנוסחת ניוטון לייבניץ
ולקבל

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

3.ב תשובה:

$$\int_C F\cdot dc$$

עבור $\vec{F}=(yz, xz, xy)$

$C=\{y=e^{x^2}, z=\sin(x^3)\}, \quad x\in[0,1]$

פתרון: עבור השדה F מתקיים $\text{rot}\, F=0$

בנוסף $F\in C^1$ לכל x,y,z

$\Leftarrow$ F משמר ב R^3

נחשב פונק' פוטנציאל

$P=yz \qquad Q=xz \qquad R=xy$

$u=\int P\,dx=\int yz\,dx=yzx+C(y,z)$

$u'_y=zx+C'_y=xz \rightarrow C'_y=0$

$C(y,z)=C_1(z)$

$u=yzx+C_1(z)$

$u'_z=yx+C_1(z)=xy \rightarrow C_1(z)=C$

$u(x,y,z)=xyz+C$

$$\int_C F\,dc=u(B)-u(A)=1\cdot e\cdot\sin(1)-0=e\sin(1)$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=e^{t^2} \\ z=\sin(t^3) \end{cases}, \quad t\in[0,1]$$

$A\rightarrow(0, e^0, \sin 0)=(0,1,0)$

$B\rightarrow(1, e^1, \sin(1))$

ג.3 $n\in\mathbb{Z}$. מצאו מסילה γ סגורה (מכוונת)
שלא עוברת דרך הראשית, שעבורה מתקיים

$$\oint_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 2\pi n$$

<u>פתרון:</u>

נזכיר כי C - מסילה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין
המקיפה את הראשית בכיוון החיובי.
F - שדה משמר מקומית, בדומה להסבר בסעיף ב'
לפי משפט גרין

$$\oint_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = \oint_{x^2+y^2=1} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$$

כאשר כיוון הסיבוב זהה.

$$\oint_{x^2+y^2=1} F\,dr = \int_0^{2\pi} y\,dx - x\,dy = \int_0^{2\pi} (\sin t\cdot(-\sin t) - \cos t\cdot\cos t)\,dt$$

$x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0,2\pi]$

$$= -2\pi$$

בכיוון הפוך הסימן מתהפך.

לכן אם Γ מורכבת ממספר סופי של מסילות כאלה,
הרי קיים $n\in\mathbb{Z}$ כך ש-

$$\int_\Gamma F\,dr = 2\pi\cdot n$$

ניתן לפרש לכך ש-n הוא מספר הפעמים ש-Γ מקיפה
את הראשית בכיוון החיובי או שלילי בהתאמה.

3 הוכיחו או הפריכו

אם F לא כוני ב-$(0,0)\in\mathbb{R}^2$ אזי $\oint_{\|\underline{x}\|=c} \bar{F}d\bar{c} \neq 0$

<u>פתרון:</u>

נפריך

$$F = \frac{(x, +y)}{x^2+y^2} \Rightarrow P'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = Q'_x$$

$$\oint_{x^2+y^2=c^2} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{c\cdot\cos t\cdot(-c\sin t)+\sin t\cdot c^2\cdot\cos t}{c^2}\,dt = 0$$

$$\begin{cases} x = c\cdot\cos t \\ y = c\cdot\sin t \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi]$$

כלומר F לא כוני ב $(0,0)$
אך
$$\int_{\|\underline{x}\|=c} \bar{F}d\bar{c} = 0$$

לכן הטענה לא נכונה.

ה

$g: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ – רציפה

$C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ – מסילה סגורה וחלקה למקוטעין

הוכיחו כי

$$\oint_C g(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0$$

פתרון:

g – רציפה ולכן אינטגרבילית לכל $x>0$
לכן לפי משפט יסודי של חדו"א
קיימת לה פונקציה קדומה רציפה רק ש-

$$\int_0^x g(t)\,dt = F(x) \quad \forall x>0$$

כי $F'(x) = g(x)$

עבור השדה הנתון
$P(x,y) = g(x^2+y^2)\cdot x \quad , \quad Q(x,y) = g(x^2+y^2)\cdot y$
נשים לב שקיימת פונקצית פוטנציאל

$u(x,y) = \frac{1}{2}F(x^2+y^2) + C$ – רציפה עבור $x>0$

$$u'_x = F'(x^2+y^2)\cdot x = g(x^2+y^2)\cdot x = P(x,y)$$
$$u'_y = F'(x^2+y^2)\cdot y = g(x^2+y^2)\cdot y = Q(x,y)$$

לכן השדה משמר $\Leftarrow$ אינטגרל מסילתי
לכל מסילה סגורה פשוטה שווה לאפס.

(1) מצאו עקומה סגורה וחלקה C שעבורה האינטגרל

$$\oint_C \left(\frac{x^2y}{4}+\frac{y^3}{3}\right)dx + x\,dy$$

מקבל ערך מקסימלי.

<u>פתרון:</u>

$$F=\left(\frac{x^2y}{4}+\frac{y^3}{3}\right)\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}$$

$F\in C^1$ בכל $\mathbb{R}^2$

נשתמש בנוסחת גרין

$$P'_y=\frac{x^2}{4}+y^2 \qquad Q'_x=1$$

$$Q'_x-P'_y=1-\frac{x^2}{4}-y^2$$

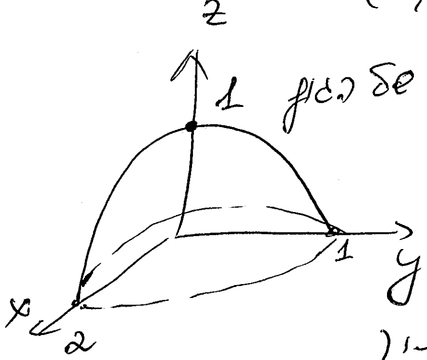
לכן

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right)dx\,dy$$

אינטגרל כפול מציין נפח מתחת לגרף של פונק'

$$z=1-\frac{x^2}{4}-y^2$$ ← פרבולואיד הפוך

בתחום $(x,y)\in D$



ולכן אם נבחר חלק מקסימלי של הגרף על מישור xy נקבל ערך מקסימלי של האינטגרל

עבור $z=0$ מקבלים קו חיתוך של פרבולואיד עם מישור xy

$$C:\ \frac{x^2}{4}+y^2=1$$

4

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ - תחום חסום, פתוח כך ש- ∂D - שפה של D

א

∂D - עקום בעל אוריינטציה חיובית

הוכיחו כי

$$vol_2(D) = \oint_{\partial D} \frac{x\,dy - y\,dx}{2} = \oint_{\partial D} x\,dy = \oint_{\partial D} -y\,dx$$

פתרון:

נגדיר שדה וקטורי

$$F = -\frac{y}{2}\cdot \vec{i} + \frac{x}{2}\cdot \vec{j} \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$P'_y = -\frac{1}{2} \qquad Q'_x = \frac{1}{2} \rightarrow Q'_x - P'_y = 1$$

לכן לפי משפט גרין

$$\oint_{\partial D} \frac{x\,dy - y\,dx}{2} = \iint_D 1\cdot dx\,dy = vol_2(D)$$

נפח של תחום D

באופן דומה אם

$$F = 0\cdot\vec{i} + x\cdot\vec{j} \rightarrow Q'_x - P'_y = 1$$

ואם נגדיר השדה

$$F = -y\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j}$$

$$Q'_x - P'_y = 1$$

4 ג i

חשבו שטח של D התחום ע״י

$$\left|\frac{x}{a}\right|^{\frac{2}{p}}+\left|\frac{y}{b}\right|^{\frac{2}{p}}=1$$

עבור $p=1,2,3$

<u>פתרון:</u> הצבה פרמטרית של המסלול

$$\begin{cases} x=a\cdot\cos^p t \\ y=b\cdot\sin^p t \end{cases},\quad t\in[0,2\pi]$$

נשתמש בנוסחה שקיבלנו בסעיף 4.א.

$$\iint_D 1.\,dx\,dy=\int_{\partial D} x\,dy=$$

הצורה סימטרית ביחס לצירי x ו-y
ולכן ניתן לעשות חישוב עבור תחום $x,y\geq 0$
ולהכפיל ב-4.

$$=4\cdot\int_0^{\pi/2} a\cdot\cos^p t\cdot b\cdot p\cdot\sin^{p-1}(t)\cdot\cos t\,dt$$

עבור $p=1$

$$S=4\cdot\int_0^{\pi/2} a\cdot b\cos^2 t\,dt=\pi ab\ \rightarrow$$ שטח של אליפסה

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

עבור $p=2$

$$S=4\int_0^{\pi/2} 2ab\cdot\cos^3 t\sin t\,dt=2a\cdot b$$

$\left|\frac{x}{a}\right|+\left|\frac{y}{b}\right|=1$ שטח של מעוין

עבור $p=3$

$$S=4\int_0^{\pi/2} 3ab\cos^4 t\cdot\sin^2 t\,dt=\frac{3\pi ab}{8}$$

שטח של אסטרואידה

5

א

$$r(x,y) = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + f(x,y)\cdot\vec{k}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f\in C^1$$

המשטח בהצגה קרטזית

$$z = f(x,y)$$

$$\vec{N} = r'_x \times r'_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = (-z'_x, -z'_y, 1)$$

נורמל בכיוון כלפי מעלה

ב

$$r = (R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$$

$$\theta\in[0,\pi] \qquad \varphi\in[0,2\pi] \qquad r<R$$

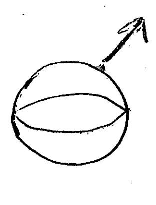
$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2+z^2=R^2$$

ספירה עם רדיוס R

$$r'_\varphi \times r'_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ R\sin\theta\cdot(-\sin\varphi) & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & R\cdot(-\sin\theta) \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\cdot(-R^2\sin^2\theta\cdot\cos\varphi) - \vec{j}\cdot(R^2\sin^2\theta\sin\varphi) + \vec{k}\cdot(-R^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta - R^2\cos^2\varphi\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta) =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\cos\varphi\cdot\vec{i} - R^2\sin^2\theta\sin\varphi\cdot\vec{j} - R^2\cdot\frac{\sin(2\theta)}{2}\cdot\vec{k}$$



הנורמל חיצוני בתחום $0\le x,y,z$ כי סימנים חיוביים ולכן

$$\vec{N} = \left(R^2\sin^2\theta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ \frac{R^2}{2}\sin(2\theta)\right) = r'_\theta\times r'_\varphi$$