חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 13.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

(1) (א) יהי $S=\{z=z(x,y),\ (x,y)\in\mathscr{D}\subset\mathbb{R}^2\}$ גרף של פונקציה, עם נורמל פונה כלפי מעלה, $\mathcal{N}_z>0$. הוכיחו:

$$\iint\limits_S f dS=\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+(\tfrac{\partial z}{\partial x})^2+(\tfrac{\partial z}{\partial y})^2}\cdot dxdy,\qquad \iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{\mathscr{D}} det\begin{bmatrix}F_x & F_y & F_z\\ 1 & 0 & \partial_x z\\ 0 & 1 & \partial_y z\end{bmatrix}dxdy.$$

(ב) ניקח חלק של גליל, $S=\{r=R,\ (\phi,z)\in\mathscr{D}\}$, עם נורמל חיצוני. הוכיחו: $\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{\mathscr{D}}(F_x\cdot x+F_y\cdot y)d\phi dz$.

(ג) יהי $S=\Big\{(r\cdot cos(\phi), r\cdot sin(\phi), z(r,\phi))\Big|\ (r,\phi)\in\mathscr{D}\Big\}$ משטח נתון בקואורדינטות גליליות, ותהי $S\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו: $\iint\limits_S f dS=\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x(r,\phi),y(r,\phi),z(r,\phi))\sqrt{r^2+(\frac{\partial z}{\partial\phi})^2+r^2(\frac{\partial z}{\partial r})^2}dr\cdot d\phi$.

(ד) קבלו נוסחאות עבור $\iint\limits_S f dS$, $\iint\limits_{\vec{S}}\vec{F}d\vec{S}$ כאשר S הוא חלק של ספירה, $S\subseteq S^2=\{x^2+y^2+z^2=R^2\}\subset\mathbb{R}^3$.

עבור שדה $\vec{F}=f\cdot\vec{r}$ והנורמל כלפי חוץ הוכיחו: $\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{\mathscr{D}} f\cdot r^3 sin(\theta)d\theta d\phi$.

(ה) עבור טורוס $S=\Big\{\vec{r}=\vec{r}(\phi_1,\phi_2)\Big|\ (\phi_1,\phi_2)\in\mathscr{D}\Big\}$ (שאלה 5.ג של ת"ב 12) קבלו נוסחה:

$$\iint\limits_S f dS=\iint\limits_{\mathscr{D}} f\big(x(\phi_1,\phi_2),y(\phi_1,\phi_2),z(\phi_1,\phi_2)\big)\big(R+r\cdot sin(\phi_1)\big)r\cdot d\phi_1 d\phi_2.$$

(2) (א) חשבו את שטח המשטח i. $\left\{\begin{matrix} z=2-x^2-y^2\\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\end{matrix}\right\}$ ii. $\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=a^2\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\le 1,\ 0<b\le a\end{matrix}\right\}$ iii. $\{(x,y,z)|\ x^2+y^2=R^2,\ x<z\le 2x\}$ iv. טורוס משאלה 1.ד.

(ב) חשבו $\oiint\limits_S (x^2+y^2)dS$ על המעטפת S של הגוף $\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$.

(ג) חשבו את המסה של כליפה $\{x^2+y^2+z^2=1,\ -\frac{1}{2}\le z\le\frac{\sqrt{3}}{2},\ x\le y\}$ בעלת צפיפות משטחית בכל נקודה השווה למרחק מהנקודה למישור xy.

(ד) חשבו את שטף השדה $\vec{F}=(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$ דרך המשטח $\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$, עם נורמל חיצוני. (כאן השדה לא רציף. חשבו את השטף דרך חלק של המשטח שעבורו $\{|x|>\epsilon_x,\ |y|>\epsilon_y,\ |z|>\epsilon_z\}$ והשאיפו $\epsilon_x,\epsilon_y,\epsilon_z\to 0$.)

(ה) יהי $S\subset\mathbb{R}^3$ משטח חלק, כך שבכל נקודה שלו כל רכיב של הנורמל לא מתאפס. יהיו π_{xy}, π_{yz}, π_{xz} היטלים על מישורי קואורדינטות. נסמן $sign(\mathcal{N}_i)$= סימן של הרכיב של הנורמל. קבלו נוסחה:

$$\int\limits_{\vec{S}}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int\limits_{\pi_{xy}(S)}F_z\cdot sign(\mathcal{N}_z)dxdy+\int\limits_{\pi_{yz}(S)}F_x\cdot sign(\mathcal{N}_x)dydz+\int\limits_{\pi_{xz}(S)}F_y\cdot sign(\mathcal{N}_y)dxdz.$$

(3) חשבו את שטף השדה דרך המשטח בדרכים שונות. (הנורמל חיצוני)

(א) $\vec{F}=ln(y^2+z^2+1)\hat{x}+\frac{e^x}{z^2+1}\hat{y}+(x-y-1)\hat{z}$, $S=\{0\le z=\sqrt{x^2+y^2}\le 1\}\subset\mathbb{R}^3$.

(ב) $\iint_{\vec{S}}\frac{ayz\cdot dydz+bxz\cdot dxdz+cxy\cdot dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^n}$, $S=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=R^2\}\subset\mathbb{R}^3$.

(ג) $\vec{F}=(3x-2y+z)\hat{x}+(2x+3y-z)\hat{y}+(x-3y+z)\hat{z}$,
$S=\Big\{|3x-2y+z|+|2x+3y-z|+|x-3y+z|\le 1\Big\}\subset\mathbb{R}^3$.

(ד) $rot(\vec{F})$, עבור $\vec{F}=(0,x+1,0)$, $S=\{x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge-\sqrt{2}\}$.

(ה) $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\Big\{\ |x|^3+|y|^4+|z+\frac{1}{4}|^2\le 4,\ x^2+y^2-1\le z\ \Big\}$.

(4) יהי $V\subset\mathbb{R}^3$ גוף חסום שהשפה שלו, $\partial V=S$, הינו משטח חלק מכוון. תהיינה $V\xrightarrow{f,g,h}\mathbb{R}$ פונקציות C^2.

(א) תהי $(\mathcal{N},\vec{v})$ זווית בין הנורמל (החיצוני) לבין וקטור קבוע. חשבו $\int_S cos(\mathcal{N},\vec{v})dS$.

(ב) קבלו זהויות גרין: i. $\oiint_{\partial V} f\nabla g\cdot d^2\vec{S}=\oiint_{\partial V} f\partial_{\mathcal{N}}g\cdot d^2S=\iiint_V\big((\nabla f)\cdot(\nabla g)+f\Delta g\big)d^3V$.

ii. $\oiint_{\partial V} g\cdot\Big(f\cdot\partial_{\mathcal{N}}h-h\cdot\partial_{\mathcal{N}}f\Big)\cdot d^2S=\iiint_V\Big(f\nabla(g\nabla h)-h\nabla(g\nabla(f))\Big)d^3V$.

(ג) f נקראת *הרמונית* אם היא המקיימת $\Delta(f)=0$ ב V. הסיקו: אם f הרמונית אז היא נקבעת בצורה יחידה ע"י $f|_{\partial V}$.
(רמז: הציבו $h=1$, $g=f$, כאשר f מתאפסת על ∂V)