חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 14.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

(1) (א) יהיו $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\vec{F},\vec{G}} \mathbb{R}^3$ ו $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, כולם גזירים ברציפות פעמיים. הוכיחו:

i. $rot(\vec{F} \pm \vec{G}) = rot(\vec{F}) \pm rot(\vec{G})$ ii. $div(rot(\vec{F})) = 0$ iii. $rot(grad(f)) = 0$

iv. אם $\vec{F} = f \cdot \vec{r}$ אז $div(\vec{F}) = \vec{r} \cdot grad(f) + 3f$ v. $rot(f \cdot \vec{F}) = grad(f) \times \vec{F} + f \cdot rot(\vec{F})$

vi. $grad(f(\vec{F})) = grad(f)|_{\vec{F}} \cdot D_{\vec{F}}$ vii. $div(\vec{F} \times \vec{G}) = rot(\vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot rot(\vec{G})$.

(ב) יהי S חצי-טורוס המתקבל ע"י סיבוב של $\{(y-2)^2 + z^2 = 1,\ x = 0\}$ מסביב לציר $\hat{z}$ ב 180^o, נגד כיוון השעון. קבעו את כיוון של השפה היחסית של S המתאים לנורמל החיצוני.

(2) (א) תהי $\vec{C} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \\ x^2 + y^2 = 2rx,\ z > 0 \end{array} \right\}$, כאשר $0 < r < R$, וכיוון המסילה חיובי אם מסתכלים מנקודה $(0, 0, +\infty)$. חשבו את צירקולצית שדה $\vec{F} = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$ לאורך $\vec{C}$.

(ב) חשבו את צירקולצית השדה $\vec{F} = (z, x, y)$ לאורך העקום $\left\{ \begin{array}{l} z = x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\}$ נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(0, 0, +\infty)$.

(ג) חשבו את העבודה של שדה $\vec{F} = (y-z, z-x, x-y)$ לאורך העקום $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R > 0 \\ x \cdot sin(\alpha) + y \cdot sin(\beta) + z \cdot sin(\gamma) = 0 \end{array} \right\}$, המכוון נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(+\infty, 0, 0)$. (כאן $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ קבועים.)

(ד) עבור עקומה $C = \{x^{10} + y^{100} + z^{1000} = 2020,\ x - y + z = 0\}$ בחרו כיוון וחשבו $\oint\limits_C \frac{ydz - zdy}{y^2 + z^2}$.

(ה) חשבו $\iint_{\vec{S}} rot \frac{cos(x^2)\hat{z}}{(x^2+y^2+z^2)^8} \cdot d\vec{S}$ עבור $S = \{x^4 + y^6 + z^8 = 1,\ z \geq -\frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}^3$, עם נורמל חיצוני.

(3) (א) תהי $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, C^1. נניח שמתקיים: $\nabla(f) \neq 0$ בכל נקודה של משטח $S = \{f(x, y, z) = 0\}$. נניח גם ש S הינו משטח קשיר מסילתית וחסום. הוכיחו/הפריכו: $\iint\limits_S \nabla(f) \cdot d\vec{S} \neq 0$.

(ב) יהי $\vec{F}$ שדה C^1 בסביבה של $p \in \mathbb{R}^3$. הסיקו ממשפט גאוס: $div(\vec{F})|_p = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{\oiint_{\partial Ball_\epsilon(p)} \vec{F} d\vec{S}}{vol_3(Ball_\epsilon(p))}$.

בפרט, אם השדה לא נוצר ולא "נעלם" ב p אז $div(\vec{F})|_p = 0$.

(ג) יהי $\vec{F}$ שדה C^1 בסביבה של $p \in \mathbb{R}^3$ ויהי S משטח חלק המכיל את p. הסיקו ממשפט סטוקס:

$rot(\vec{F}) \cdot \hat{\mathcal{N}}_S|_p = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{\oint_{\partial(Ball_\epsilon(p) \cap S)} \vec{F} d\vec{C}}{vol_2(Ball_\epsilon(p) \cap S)}$. בפרט, אם קווי השדה לא "מסתובבים" ליד p אז $rot(\vec{F}) \cdot \hat{\mathcal{N}}_S|_p = 0$.

(4) (א) יהי $\mathbb{R}^3 \supseteq \mathscr{D} \xrightarrow{\vec{F}} \mathbb{R}^3$ שדה משמר, C^1, בתחום פתוח וקשיר מסילתית. נקבע נקודה $\underline{x}_0 \in \mathscr{D}$ ונגדיר $\phi(\underline{x}) = \int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}} \vec{F} d\vec{C}$. בדקו שההגדרה לא תלויה בבחירת המסלול מ $\underline{x}_0$ ל $\underline{x}$. הוכיחו: $grad(\phi) = \vec{F}$.

(ב) במקרים הבאים בדקו האם $\vec{F}$ שדה משמר מקומית/גלובלית. אם כן, מצאו את הפוטנציאל.

i. $\vec{F} = e^y(\hat{x} + x\hat{y})$, ב $\mathbb{R}^2$. ii. $\vec{F} = \frac{y\hat{x} + x\hat{y}}{1 + x^2y^2}$, ב $\mathbb{R}^2$. iii. $\vec{F} = \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2 + y^2}$, ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

iv. $\vec{F} = \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2 + y^2}$, בתחום $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ x \geq 0\}$, v. $\vec{F} = \frac{-x\hat{x} + y\hat{y}}{(x^2 + y^2)^2}$, בתחום $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ x \geq 0\}$.

(5) יהי $\vec{F}$ משמר מקומית ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(א) הוכיחו: $\vec{F}$ משמר גלובלית ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ אמ"מ $\vec{F}$ משמר גלובלית ב $\{1 < x^2 + y^2 < 1 + \epsilon\}$.

הדרכה: תהי γ לולאה ונקבע פרמטריזציה שלה בקוטביות: $r(t)$, $\phi(t)$, כאן $\phi(t) \in [0, \infty)$. הוכיחו כי קיימת לולאה $\tilde{\gamma}$ שעבורה פונקציה $\phi(t)$ מונוטונית (אולי קבועה) ומתקיים $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \oint_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot \tilde{\gamma}$. הסיקו כי קיימת לולאה $\tilde{\tilde{\gamma}}$ בתוך $\{1 < x^2 + y^2 < 1 + \epsilon\}$ כך ש $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \oint_{\tilde{\tilde{\gamma}}} \vec{F} \cdot d\tilde{\tilde{\gamma}}$.

(ב) הוכיחו: קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שהשדה $(F_x + \frac{cy}{x^2+y^2}, F_y - \frac{cx}{x^2+y^2})$ משמר גלובלית ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(6) קבלו בעזרת קואורדינטות מרוכבות, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, את ההצגות:

i. $\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2i}(\frac{dz}{z} - \frac{d\bar{z}}{\bar{z}})$ ii. $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}(\frac{dz}{z} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}})$.

(המשך בסמסטר הבא ...)