1. א. ii. ע"י חישוב ישיר נקבל:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}F)=\operatorname{div}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\operatorname{div}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$

$$,\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}=0$$

המעבר האחרון מוצדק ע"י משפט שוורץ (שיוויון של נגזרות מעורבות תחת תנאים מסוימים).

vii. ע"י חישוב ישיר נקבל:

$$\operatorname{div}(F\times G)=\operatorname{div}\begin{vmatrix} i & j & k \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix}=\operatorname{div}\left(F_2G_3-F_3G_2,F_3G_1-F_1G_3,F_1G_2-F_2G_1\right)=$$

$$\frac{\partial\left(F_2G_3-F_3G_2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(F_3G_1-F_1G_3\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(F_1G_2-F_2G_1\right)}{\partial z}=$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}G_3+\frac{\partial G_3}{\partial x}F_2-\frac{\partial F_3}{\partial x}G_2-\frac{\partial G_2}{\partial x}F_3+$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}G_1+\frac{\partial G_1}{\partial y}F_3-\frac{\partial F_1}{\partial y}G_3-\frac{\partial G_3}{\partial y}F_1+$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}G_2+\frac{\partial G_2}{\partial z}F_1-\frac{\partial F_2}{\partial z}G_1-\frac{\partial G_1}{\partial z}F_2=$$

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\cdot G-\left(\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z},\frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x},\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)\cdot F=$$

$$.\operatorname{rot}F\cdot G+\operatorname{rot}G\cdot F$$

2. א. נשתמש במשפט סטוקס. נשים לב כי $\vec{N}=\left(X,y,z\right)$ הוא וקטור נורמל למשטח, כאן $X=x-R$.

נחשב את הרוטור:

$$.\operatorname{rot}F=2\left(y-z,z-X,X-y\right)$$

נשים לב כי

$$\text{rot}F \perp \vec{N},$$

מכאן האינטגרל הדרוש הוא 0.

ב. נרשום פרמטריזציה:

$$s(\rho,\theta)=\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\rho^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\right)=\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\rho^2\cos 2\theta\right)$$

כאשר

$$0\le\rho\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

מתקיים:

$$s'_\rho\times s'_\theta=\left[-2\rho^2\left(\sin\theta\sin 2\theta+\cos\theta\cos 2\theta\right),-2\rho^2\left(\cos\theta\sin 2\theta+\sin\theta\cos 2\theta\right),\rho\right].$$

נשים לב כי הנורמל מצביע בכיוון ההפוך מהנדרש במשפט סטוקס.

עתה נחשב את הרוטור:

$$\text{rot}F=(1,1,1).$$

ועכשיו נשתמש במשפט סטוקס:

$$\oint_\gamma F\cdot dl=\iint_S \text{rot}F\cdot d\sigma=\cdots=\text{something}.$$

ג. נשתמש במשפט סטוקס. נמצא וקטור יחידה שמהווה נורמל למשטח (המישור), קל להשתכנע כי זהו

$$\hat{n}=\frac{(\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma)}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}}.$$

קל להשתכנע כי $\text{rot}F=(-2,-2,-2)$.

מכאן

$$\oint_\gamma F\cdot dl=\iint_S \text{rot}F\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\iint_S\left(\text{rot}F\cdot\hat{n}\right)d\sigma=-2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)\underbrace{\pi R^2}_{\text{area of a "big" circle}}.$$

ד. ע"פ משפט סטוקס האינטגרל המבוקש שווה ל- 0.

ה. ע"פ מישפט סטוקס:

$$\iint_S \operatorname{rot}\frac{\cos\left(x^2\right)z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^8}\,d\sigma=\oint_\gamma \frac{\cos\left(x^2\right)z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^8}\,dl,$$

כאשר

$$\gamma:=\left\{\left(x,y,-\frac{1}{2}\right)\in\mathbb{R}^3 : x^4+y^6=\frac{255}{256}\right\}$$

בכיוון השעון.

שוב נשתמש במשפט סטוקס (כמשטח ניקת את $z=-\frac{1}{2}$), וקטור הנורמל במקרה זה הוא $(0,0,1)$ שמאונך ל-

$$\operatorname{rot}\frac{\cos\left(x^2\right)z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^8}=\left(\text{something},\ \ \text{something}\ \ \text{else},0\right),$$

מכאן האינטגרל המבוקש שווה ל- 0.

3. א. הטענה נכונה. תהא

$$r(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right),\ \ (u,v)\in\Omega$$

פרמטריזציה של המשטח. נשים לב כי מתקיים

$$r_u'\times r_v'=\lambda(u,v)\nabla f$$

כאשר $\lambda(u,v)$ בעלת סימן קבוע. מכאן:

$$\iint_S \nabla f\cdot d\sigma=\iint_\Omega \lambda\left\|\nabla f\right\|^2 dA\neq 0.$$

ב. התוצאה תנבע ממשפט גאוס וממשפט ערך הממוצע:

$$\iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div}F dV=\operatorname{div}F\left(p_0\right)\operatorname{vol}B_\varepsilon\left(p\right),$$

לכן

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\iint_{\partial\left(B_\varepsilon(p)\right)} F\cdot d\sigma}{\operatorname{vol}B_\varepsilon\left(p\right)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\iiint_{B_\varepsilon(p)}\operatorname{div}F dV}{\operatorname{vol}B_\varepsilon\left(p\right)}=\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{div}F\left(p_0\right)=\operatorname{div}F\left(p\right).$$

4. א. תהא $\psi : D \to \mathbb{R}$ פונקציית- C^1 כך ש- $F = \nabla\psi$. תהיינה $(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in D$. תהא

$$\gamma : [0,1] \to D$$

מסילה חלקה כך ש-

$$\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0), \quad \gamma(1) = (x, y, z).$$

נסמן:

$$\alpha(t) = \psi(\gamma(t))$$

מתקיים:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} F \cdot dl = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} \nabla\psi \cdot dl = \int_0^1 \nabla\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \underset{\text{chain rule}}{=}$$

$$\int_0^1 \alpha'(t) dt = \alpha(1) - \alpha(0) = \psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z_0),$$

מכאן התוצאה.

ב. i. זהו לא שדה משמר (לא מקומית ולא גלובלית) מאחר ו- $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$.

ii. זהו שדה משמר מקומית מאחר ו- $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, היות ותחום הרציפות של F (שהוא $\mathbb{R}^2$) מהווה תחום פשוט-קשר נסיק כי F הינו שדה משמר. נחשב את פונקציית הפוטנציאל φ של F. מכיוון ש-

$$\varphi'_x = \frac{y}{1 + x^2 y^2},$$

נסיק כי

$$\varphi = \int \varphi'_x dx = \int \frac{y dx}{1 + x^2 y^2} = \arctan(xy) + g(y).$$

מצד שני מכיוון ש-

$$\frac{x}{1 + x^2 y^2} + g'(y) = \varphi'_y = \frac{x}{1 + x^2 y^2}.$$

מסקנה:

$$\varphi = \arctan\left(xy\right).$$

iii. מדובר בשדה משמר מקומית הרי $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, אך לא משמר גלובלית שהרי

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy \neq 0$$

כאשר γ הוא מעגל ברדיוס 1 סביב ראשית הצירים.

iv. השדה הנתון הינו משמר, להלן פונקציית הפוטנציאל:

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}.$$

v. זהו לא שדה משמר (לא מקומית ולא גלובלית) מאחר ו- $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$.

5. ב. נסמן

$$G = F - c\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \left(P + c\cdot\frac{y}{x^2+y^2}, Q - c\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

תהא γ עקום פשוט, סגור וחלק למקוטעין (בכיוון החיובי) ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(0,0\right)\right\}$. ניקח

$$c = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma} F\cdot dl.$$

נשים לב כי

$$\oint_{\gamma} G\cdot dl = 0.$$

6. i. מתקיים:

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{dz}{z} - \frac{d\overline{z}}{\overline{z}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{dx+idy}{x+iy} - \frac{dx-idy}{x-iy}\right) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{\left(dx+idy\right)\left(x-iy\right)-\left(dx-idy\right)\left(x+iy\right)}{x^2+y^2} =$$

$$\frac{1}{2i}\cdot\frac{2ixdy-2iydx}{x^2+y^2} = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$