חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 2.

(מרצים: ד .גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. ציירו/תארו את המשטחים המוגדרים ב $\mathbb{R}^3$ ע"י משוואות הבאות. תארו את החתכים ע"י מישורים $\{x=x_0\}$ $\{y=y_0\}$ $\{z=z_0\}$.

   (א) i. $\{(x^2-1)(x^2-2)=0\}$ ii. $\{(x^2-1)(y^2-1)=0\}$ iii. $\{(x-1)(y+2)(z+3)=0\}$

   (ב) i. $\{x=-z^2-y^2-5\}$ ii. $\{z=x^2-y^2\}$ iii. $\{z=xy\}$ iv. $\{z^2=x^2+y^2-1\}$ v. $\{x^2=z^2+y^2+1\}$

   (ג) i. $\{z=sin(x^2+y^2)\}$ ii. $\{z=sin(x)\}$ c. $\{sin(x^2+y^2+z^2)=1\}$.

2. ציירו/תארו את התחומים הבאים ב $\mathbb{R}^3$ המוגדרים ע"י התנאים הבאים: i. $\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le 1\right\}$

   ii. $\left\{1-x^2-y^2\ge z\ge x^2+y^2-1\right\}$ iii. $\left\{x^2+y^2+z^2\le 1,\ (x-0.5)^2+(y-0.5)^2\le 1\right\}$

   iv. $\left\{0\le z\le \frac{1}{xy},\ |x|+|y|\le 1\right\}$ v. $\left\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$ vi. $\left\{z^2\le x^2+y^2+1,\ x^2+y^2\le 1\right\}$.

3. במקרים הבאים ציירו/תארו את המשטח המתקבל ע"י סיבוב של עקום, ורשמו את משוואת המשטח:

   i. $\{y=\sqrt{1-x^2},\ \ z=0\}\subset\mathbb{R}^3$ מסביב לציר $\hat{x}$. ii. $\{x=1+y^2,\ |y|\le 1,\ \ z=0\}\subset\mathbb{R}^3$ מסביב לציר $\hat{y}$.

   iii. $\{(x-5)^2+(y-3)^2=1,\ \ z=0\}\subset\mathbb{R}^3$ מסביב לציר $\hat{y}$.

4. (א) שרטטו את קווי גובה/ עבור הפונקציות הבאות. נסו לשחזר/לדמיין את הגרפים של הפונקציות. i. $f(x,y)=\frac{x}{y}$

   ii. $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$ iii. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+2y^2}$ iv. $f(x,y)=|x|+|y|-|x+y|$ v. $f(x,y)=\frac{y^2+x^2-1}{x^2+4}$.

   (ב) נקבע וקטורים $\vec{v}_0,\vec{v}_1\in\mathbb{R}^n$, $\vec{v}_1\neq 0$ ונגדיר העתקה $\mathbb{R}^1\xrightarrow{\phi}\mathbb{R}^n$ ע"י $\phi(t)=\vec{v}_1\cdot t+\vec{v}_0$. הוכיחו: התמונה של ϕ הינה ישר. קבלו את מערכת המשוואות שמגדירה את הישר. האם הגרף של ϕ גם ישר?

   (ג) נקבע וקטורים $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in\mathbb{R}^n$, ונגדיר העתקה $\mathbb{R}^2\xrightarrow{\phi}\mathbb{R}^n$ ע"י $\phi(t_1,t_2)=\vec{v}_1\cdot t_1+\vec{v}_2\cdot t_2$. האם התמונה של ϕ בהכרח מישור דו-מימדי?

5. נקבע מטריצה $A\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ המקיימת: $A\cdot A^t=\mathbb{1}$. נגדיר העתקה $\mathbb{R}^n\ni\underline{x}\to A\cdot\underline{x}\in\mathbb{R}^n$. הוכיחו: $||A\cdot\underline{x}||=||\underline{x}||$ $\forall\ \underline{x}\in\mathbb{R}$.

6. ציירו/תארו את הגרף Γ_f של פונקציה $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(t)=(cos(t),sin(t))$. נתבונן בהיטלים של הגרף, על תחום ההגדרה $\mathbb{R}^1\ni t\leftarrow(t,f(t))\ni\Gamma_f$, ועל הטווח, $\mathbb{R}^2\ni f(t)\leftarrow(t,f(t))\ni\Gamma_f$. איזה מהם חח"ע? תארו את התמונות של ההיטלים.

7. נגדיר את הספירה, $S^2:=\{x^2+y^2+z^2=1\}\subset\mathbb{R}^3$, והקוטב הצפוני שלה, $pole=(0,0,1)\in S^2$. נגדיר פונקצית הטלה $S^2\setminus\{pole\}\xrightarrow{\phi}\mathbb{R}^2$ ע"י הכלל: ϕ שולחת את נקודה $pt\in S^2\setminus\{pole\}$ לנקודת החיתוך של הישר $\overline{pt,pole}$ עם המישור $\{z=0\}\subset\mathbb{R}^3$. (להטלה זאת קוראים: $Stereographic\ projection$) לאן נשלח הקו המשווה? (כלומר $\{z=0\}\cap S^2$) רשמו את הנוסחאות המפורשות עבור ϕ. לאן נשלחות הנקודות של חצי ספירה העליונה? האם ההעתקה חח"ע? האם היא על? (בדקו גם בצורה גאומטרית, גם בעזרת הנוסחאות) תארו את הנקודות על הספירה שנשלחות לעקום $\{y=x^2\}\subset\mathbb{R}^2$.

8. תהי $\{\underline{a}_k\}$ סדרת הנקודות ב $\mathbb{R}^n$, כאן $\underline{a}_k=(a_{1,k},\dots,a_{n,k})$. הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

   (א) $\underline{a}_k\to\underline{a}_0$ אמ"מ קיים כדור $Ball_\epsilon(\underline{a}_0)$ שמכיל את כל הסדרה פרט למספר סופי של איברים.

   (ב) $\underline{a}_k\to\underline{a}_0$ אמ"מ עבור כל $\epsilon>0$ הכדור $Ball_\epsilon(\underline{a}_0)$ מכיל את אינסוף מאיברי הסדרה.

   (ג) $\underline{a}_k\to\underline{a}_0$ אמ"מ $a_{i,k}\to a_{i,0}$ עבור כל $i=1,\dots,n$.

   (ד) $\underline{a}_k+\underline{b}_k\to\underline{a}_0+\underline{b}_0$ אמ"מ $\underline{a}_k\to\underline{a}_0$ ו $\underline{b}_k\to\underline{b}_0$.

   (ה) $\underline{a}_k\to\underline{a}_0$ אמ"מ כל תת סדרה של $\{\underline{a}_k\}$ מתכנסת ל $\underline{a}_0$.