פתרונות לדף 2

1. (א), (i) מדובר בארבעה מישורים: $x=\pm1$, $x=\pm\sqrt{2}$.

(ii) מדובר בארבעה מישורים: $x=\pm1$, $y=\pm1$.

(iii) מדובר בשלושה מישורים: $x=1$, $y=-2$, $z=-3$.

(ב), (i) מדובר בפרבולואיד אליפטי שקודקודו בנקודה $(-5,0,0)$ (ציר ה- x הינו ציר הסימטריה שלו).

(ii) פרבולואיד היפרבולי.

(iii) חתכים של המשטח עם המישורים מן הצורה $x=x_0$ הינם ישרים: $z(y)=x_0y$, כנ"ל החתכים עם המישורים $y=y_0$: $z(x)=xy_0$. החתכים עם המישורים מן הצורה $z=z_0$ הם היפרבולות $z_0=xy$ כש- $z_0\neq0$ וצירי הקואורדינטות (x ו- y) אם $z_0=0$.

(iv) היפרבולואיד חד-יריעתי.

(v) היפרבולואיד דו-יריעתי, ציר הסימטריה שלו הוא ציר x .

(ג) (i) חתכים של המשטח עם המישורים מן הצורה $x=x_0$ הינם סינוסואידות: $z(y)=\sin\left(x_0^2+y^2\right)$, כנ"ל החתכים עם המישורים $y=y_0$: $z(x)=\sin\left(x^2+y_0^2\right)$. החתכים עם המישורים מן הצורה $z=z_0$ הם:

$(*)$ עבור $|z|>1$ - קבוצה ריקה;

$(*)$ עבור $|z|\leq1$ - נמצא שתי זוויות α,β כך ש- $z_0=\sin\alpha=\sin\beta$ ואז נקבל שתי משפחות של מעגלים קונצנטריים:

$$x^2+y^2=\alpha+2\pi k,\alpha+2\pi k\geq0$$

ו-

$$x^2+y^2=\beta+2\pi k,\beta+2\pi k\geq0 .$$

(ii) חתכים של המשטח עם המישורים מן הצורה $x=x_0$ הינם ישרים: $z=\sin\left(x_0\right)$, החתכים עם המישורים $y=y_0$ הם סינוסואידה: $z(x)=\sin(x)$. החתכים עם המישורים מן הצורה $z=z_0$ הם:

$(*)$ עבור $|z|>1$ - קבוצה ריקה;

$(*)$ עבור $|z|\leq1$ - נמצא שתי זוויות α,β כך ש- $z_0=\sin\alpha=\sin\beta$ ואז נקבל שתי משפחות של ישרים מקבילים:

$$\begin{cases} x=\alpha+2\pi k \\ z=z_0 \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$$

ו-

$$.\begin{cases} x=\beta+2\pi k \\ z=z_0 \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$$

(iii) מתקיים $\sin\left(x^2+y^2+z^2\right)=1$ אמ"מ $x^2+y^2+z^2=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,1,2,\dots$, כלומר זוהי משפחה של ספירות קונצנטריות.

3. לפני שנפתור את השאלה, נקבל תוצאה שימושית: אם במישור yOz נתון עקום ע"י המשוואה $F\left(y,z\right)=0$. אז משוואת המשטח המתקבל מסיבוב של העקום סביב ציר ה- y נתון ע"י

$$.F\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$$

אכן, תהא $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ נקודה כלשהי על משטח הסיבוב של העקום. תהא M נקודת ה"מקור" של M_0 (ז"א M נמצאת על העקום ונקודה M_0 מתקבלת מ- M ע"י סיבוב העקום סביב ציר y באיזושהי זווית). שעוריה של M הם $\left(0,y_0,z\right)$. נוריד אנך MN מנקודה M לציר y . מתקיים:

$$,\pm z=\left\|\overline{NM}\right\|=\left\|\overline{NM_0}\right\|=\left\|\left(x_0,y_0,z_0\right)-\left(0,y_0,0\right)\right\|=\sqrt{x_0^2+z_0^2}$$

אז קיבלנו ש-

$$,0=F\left(y_0,z\right)=\left(y_0,\pm\sqrt{x_0^2+z_0^2}\right)$$

מכאן משוואת המשטח היא

$$.F\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$$

עתה ניגש לפתרון השאלה:

(i) מסובבים חצי מעגל יחידה ומקבלים ספירת היחידה $x^2+y^2+z^2=1$.

(ii) מסובבים את העקום $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 : x=1+y^2, z=0, y\le1\right\}$ ומקבלים את המשטח

$$.\sqrt{x^2+z^2}=y^2+1$$

(iii) המטח שמתקבל הוא טורוס:

$$\left[x^2+\left(y-3\right)^2+z^2+24\right]^2=100\left(x^2+z^2\right).$$

4. (א) (iv) נשים לב כי ברביע ראשון וברביע שלישי $f\equiv 0$. נחלק למקרים:

(1) $x>0, y<0, x+y>0$, אז נקבל כי

$$c=f\left(x,y\right)=x-y-(x+y)=-2y,$$

כלומר

$$y=-\frac{c}{2}.$$

(2) $x>0, y<0, x+y<0$, אז נקבל כי

$$c=f\left(x,y\right)=x-y+(x+y)=2x,$$

כלומר

$$x=\frac{c}{2}.$$

(3) $x<0, y>0, x+y>0$, אז נקבל כי

$$c=f\left(x,y\right)=-x+y-(x+y)=-2x,$$

כלומר

$$x=-\frac{c}{2}.$$

(4) $x<0, y>0, x+y<0$, אז נקבל כי

$$c=f\left(x,y\right)=-x+y+(x+y)=2y,$$

כלומר

$$y=\frac{c}{2}.$$

(v) מתקיים:

$$c = f\left(x, y\right) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + 4}$$

אמ"מ

$$.\left(1-c\right)x^2 + y^2 = 1+4c$$

עבור $c < -\frac{1}{4}$ נקבל קבוצה ריקה.

עבור $c = -\frac{1}{4}$ נקבל נקודה $\left(0,0\right)$.

עבור $-\frac{1}{4} < c < 1$ נקבל משפחה של אליפסות.

עבור $c = 1$ נקבל זוג ישרים $y = \pm\sqrt{5}$

עבור $c > 1$ נקבל משפחה של היפרבולות.

(ב) זהו ישר שוקטור הכיוון שלו הוא $\vec{v}_1$. נרשום

$$\vec{v}_1 = \left(v_1, v_2, \ldots, v_n\right), \vec{v}_0 = \left(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \ldots, v_n^{(0)}\right)$$

הגרף של ϕ נתון ע"י

$$, G = \left(t, \phi\left(t\right)\right) = \left(t, \vec{v}_1 t + \vec{v}_0\right) = t\left(1, v_1, v_2, \ldots, v_n\right) + \left(0, v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \ldots, v_n^{(0)}\right)$$

שהוא ישר אשר וקטור הכיוון שלו הוא $\left(1, v_1, v_2, \ldots, v_n\right)$.

(ג) אם הוקטורים תלוים לינארית, אז התמונה היא לא מישור דו-מימדי.

5. מתקיים:

$$.\left\|Ax\right\|^2 = \left\langle Ax, Ax\right\rangle = \left\langle x, A^* Ax\right\rangle = \left\langle x, A^t Ax\right\rangle = \left\langle x, Ix\right\rangle = \left\langle x, x\right\rangle = \left\|x\right\|^2$$

6. הגרף הוא ספירלה סביב ציר ה- x. ההיטל על ציר ה- x הוא $\left(-\infty, +\infty\right)$. ההיטל על מישור ה- yz הוא מעגל יחידה (שמרכזו בראשית). בבירור ההיטל על המישור אינו חח"ע, ההיטל על הציר כן חח"ע.

7. תהא $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ נקודה על הספירה. נרשום את משוואת הישר שעובר דרך P ו- $N\left(0,0,1\right)$:

$$.\, r\left(t\right) = t\left(x_0, y_0, z_0\right) + \left(1-t\right)\left(0,0,1\right) = \left(tx_0, ty_0, t\left(z_0 - 1\right) + 1\right)$$

נקודת החיתוך של ישר זה עם המישור $z=0$ היא הנקודה שתתאים ל- P, נחשבה

$$t\left(z_0-1\right)+1=0$$

אמ"מ

$$t_0=\frac{1}{1-z_0}.$$

נציב במשוואת הישר ונקבל את הנקודה הדרושה:

$$r\left(t_0\right)=\left(\frac{x_0}{1-z_0},\frac{y_0}{1-z_0},0\right).$$

ההטלה הסטראוגרפית הינה חח"ע. נסמן את ההטלה הסטראוגרפית ב- φ, אז קיבלנו כי

$$\varphi\left(x,y,z\right)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right).$$

נחשב את ההופכית של ההטלה הסטראוגרפית: תהא $P\left(x_0,y_0,0\right)$ נקודה במישור. נרשום את משוואת הישר שעובר דרך P ו- $N\left(0,0,1\right)$:

$$r\left(t\right)=t\left(x_0,y_0,0\right)+\left(1-t\right)\left(0,0,1\right)=\left(tx_0,ty_0,1-t\right).$$

נקודת החיתוך של ישר זה עם ספירת היחידה היא הנקודה שתתאים ל- P, נחשבה

$$1=\left(tx_0\right)^2+\left(ty_0\right)^2+\left(1-t\right)^2=\left(x_0^2+y_0^2+1\right)t^2-2t+1,$$

נשים לב כי עבור $t=0$ מתקבל הקוטב הצפוני. נניח כי $t\neq 0$, נקבל

$$t_0=\frac{2}{x_0^2+y_0^2+1}.$$

נציב במשוואת הישר ונקבל את הנקודה הדרושה:

$$r\left(t_0\right)=\left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1},\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1},\frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1}\right).$$

תמונת קו המשווה (כלומר $\left\{\left(x,y,0\right)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=1\right\}$ היא הקבוצה עצמה. אכן, בהינתן $P\left(x_0,y_0,0\right)$ המקיימת $x_0^2+y_0^2=1$, נציבה בנוסחא שקיבלנו ונראה שתתקבל נקודה עצמה.

עתה נבין את התמונה ההופכית של הקבוצה $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2\right\}$ תחת ההטלה הסטראוגרפית. נסמן את ההופכית להטלה הסטראוגרפית ב- Φ. עלינו לחשב את $\Phi(A)$. כזכור

$$\Phi(x,y)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right),$$

מכאן

$$\Phi(A)=\left\{\left(\frac{2x}{x^4+x^2+1},\frac{2x^2}{x^4+x^2+1},\frac{x^4+x^2-1}{x^4+x^2+1}\right): x\in\mathbb{R}\right\}.$$

8. (א) הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית היא

$$a_n=(-1)^n.$$

ניקח כדור $B_2(0)=(-2,2)$. הכדור הזה מכיל את כל איברי הסדרה, אך היא לא מתכנסת.

(ב) הטענה לא נכונה. ראו את הדוגמא מסעיף (א), כל כדור $B_\varepsilon(1)=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ מכיל אינסוף מאיברי הסדרה, אך היא לא מתכנסת ל- 1 (היא כלל לא מתכנסת).

(ג) הטענה נכונה.

$\Leftarrow$ נניח כי $\left\{\mathbf{a}_k=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ו- $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{a}_k=\mathbf{a}_0=\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)$, ז"א לכל $\varepsilon>0$ קיים $K(\varepsilon)$ כך שלכל $k>K(\varepsilon)$ מתקיים:

$$\|\mathbf{a}_k-\mathbf{a}_0\|<\varepsilon,$$

ז"א

$$\sqrt{\left(x_1^{(k)}-x_1^0\right)^2+\left(x_2^{(k)}-x_2^0\right)^2+\ldots+\left(x_n^{(k)}-x_n^0\right)^2}<\varepsilon,$$

אבל

$$\left|x_j^{(k)}-x_j^0\right|\le\sqrt{\left(x_1^{(k)}-x_1^0\right)^2+\left(x_2^{(k)}-x_2^0\right)^2+\ldots+\left(x_n^{(k)}-x_n^0\right)^2}<\varepsilon$$

לכל $1\le j\le n$. מסקנה: לכל $\varepsilon>0$ קיים $K(\varepsilon)$ כך שלכל $k>K(\varepsilon)$ מתקיים

$$\left|x_j^{(k)}-x_j^0\right|<\varepsilon$$

לכל $1\le j\le n$, ז"א

$$\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j^0$$

לכל $1\le j\le n$.

$\Rightarrow$ יהא $\varepsilon>0$. נניח כי $\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j^0$ לכל $1\le j\le n$, ז"א ל- $\varepsilon/\sqrt{n}$ קיים $K_j(\varepsilon)$ כך שלכל $k>K_j(\varepsilon)$ מתקיים:

$$\left|x_j^{(k)} - x_j^0\right| < \varepsilon/\sqrt{n}.$$

יהא

$$K(\varepsilon)=\max\left\{K_1(\varepsilon),K_2(\varepsilon),\dots,K_n(\varepsilon)\right\},$$

אזי לכל $k>K(\varepsilon)$ מתקיים

$$\left|x_j^{(k)} - x_j^0\right| < \varepsilon/\sqrt{n}$$

לכל $1\le j\le n$. לכן לכל מתקיים

$$\left\|\vec{x}_k-\vec{x}_0\right\| = \sqrt{\left(x_1^{(k)}-x_1^0\right)^2+\left(x_2^{(k)}-x_2^0\right)^2+\dots+\left(x_n^{(k)}-x_n^0\right)^2} < \frac{\varepsilon}{n}n=\varepsilon,$$

ז"א

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{a}_k=\mathbf{a}_0.$$

(ד) הטענה לא נכונה. ניקח $n=1$, $a_k=n$, $b_k=-n$. מתקיים:

$$a_k+b_k\to 0,$$

אך a_k ו- b_k לא מתכנסות.

הערה: הכיוון השני של הטענה הוא נכון.

(ה) הטענה נכונה. $\left\{\mathbf{a}_k=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ו- $\lim_{k\to\infty}\mathbf{a}_k=\mathbf{a}_0=\left(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0\right)$.

ע"פ סעיף **(ג)**

$$\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j^0$$

לכל $1\le j\le n$. מחדו"א-1 כל תת סדרה של $x_j^{(k)}$ מתכנסת ל- x_j^0 לכל $1\le j\le n$, לכן כל תת-סדרה של $\mathbf{a}_k$ מתכנסת ל- $\mathbf{a}_0$. הוכחת הכיוון השני דומה.