חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 3.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. (א) הוכיחו כי פונקציה $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} : & x \neq 0 \\ 0 : & x = 0 \end{cases}$ רציפה לאורך כל ישר דרך הראשית, אך לא רציפה בראשית.
האם אפשר לזהות את אי-רציפות של f בעזרת קווי רמה?

(ב) הוכיחו: פונקציה $\mathbb{R}^n \supseteq \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ רציפה אמ"מ כל הרכיבים שלה, $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m)$, רציפים.

(ג) הוכיחו: אם $\mathbb{R}^n \supseteq \mathscr{D} \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}^1$ פונקציות רציפות אז גם $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ רציפות (בתחום הגדרתן).

2. (א) בדקו את קיום/חשבו את הגבולות הבאים:
i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(x^2-y^2)}{|x|+|y|}$ ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} tan(\frac{xy^2}{x^2+y^2})$ iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ iv. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^4+y^4+z^4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(ב) הוכיחו: אם קיים הגבול $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x})$ אז הוא יחיד.

(ג) (כלל הסנדוויץ') נניח שבסביבה של נקודה $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ מתקיים: $f(\underline{x}) \le g(\underline{x}) \le h(\underline{x})$. נניח שבנוסף מתקיים: $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} h(\underline{x}) = \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x})$.
הוכיחו: $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} h(\underline{x}) = \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} g(\underline{x})$.

(ד) תהי $f(x,y) = \sqrt{y^2-4} \cdot ln(5-x^2-y^2)$. שרטטו את תחום ההגדרה. שרטט את קו רמה בגובה 0. באילו נקודות הפונקציה רציפה? בדקו את קיום/חשבו את הגבולות הבאים: i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-2)} f(x,y)$ ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\sqrt{5})} f(x,y)$ iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$.

3. עבור קבוצות הבאות מצאו את הפנים, הסגור והשפה. קבעו האם הקבוצות פתוחות/סגורות/קומפקטיות? (במקרה של קבוצות ב $\mathbb{R}^n$ צריך להוכיח)
i. $\begin{Bmatrix} x^2-3y^2+7z^2=4 \\ x^2+y^2+z^2 \le 10 \end{Bmatrix} \subset \mathbb{R}^3$ ii. $\begin{Bmatrix} |y|+|z| \le 1 \\ x^2+y^2 > 2 \end{Bmatrix} \subset \mathbb{R}^3$ iii. $S^{n-1} := \{\underline{x} \mid ||\underline{x}|| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ iv. $\prod\limits_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$.

4. הוכיחו/הפריכו:

(א) כל איחוד של קבוצות פתוחות/סגורות/קומפקטיות הינו פתוח/סגור/קומפקטי.

(ב) כל היתוך של קבוצות פתוחות/סגורות/קומפקטיות הינו פתוח/סגור/קומפקטי.

(ג) אם $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ קבוצות פתוחות/סגורות/קומפקטיות, אז הקבוצה $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ פתוחה/סגורה/קומפקטית.

(ד) אם הפונקציה $\mathbb{R}^n \supseteq \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ רציפה אז הגרף שלה, $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, קבוצה סגורה. (ומה קורה כאשר הפונקציה לא רציפה?)

(ה) אם הפונקציה $\mathbb{R}^n \supseteq \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ רציפה ו $\mathscr{D}_f$ קבוצה פתוחה/סגורה, אז התמונה, $f(\mathscr{D}_f) \subseteq \mathbb{R}^m$, קבוצה פתוחה/סגורה.

5. (א) הוכיחו שפונקצית מרחק בין שתי נקודות, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{dist} \mathbb{R}$, $dist(\underline{x}, \underline{y}) := ||\underline{x} - \underline{y}||$, הינה רציפה.

(ב) נגדיר מרחק בין נקודה $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ לבין קבוצה $S \subset \mathbb{R}^n$ ע"י $dist(\underline{x}_0, S) := inf\{dist(\underline{x}_0, \underline{x}) \mid \underline{x} \in S\}$.
חשבו את המרחק בין $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ לבין הקבוצות i. $\{xy=1\} \subset \mathbb{R}^2$ ii. $Ball_1(1,0) \subset \mathbb{R}^2$ iii. $Ball_1(-2,-3) \subset \mathbb{R}^2$.

(ג) הוכיחו: אם $S \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה, אז המרחק $dist(\underline{x}_0, S)$ מתקבל עבור נקודה של S. (כלומר, קיימת נקודה $s \in S$ כך ש: $dist(\underline{x}_0, s) = dist(\underline{x}_0, S)$.) מה יכול לקרות עבור קבוצות לא סגורות?

(ד) נגדיר מרחק בין קבוצות $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ ע"י $dist(S_1, S_2) := inf\{dist(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}$. חשבו:
i. $dist\big(Ball_1(-5,-7), Ball_2(8,9)\big)$ ii. $dist\big(Ball_1(-1,0), Ball_1(1,0)\big)$ iii. $dist\big(\{xy=1\},\ \{xy=-1\}\big)$.
הוכיחו: אם S_1, S_2 קבוצות קומפקטיות אז המרחק מתקבל עבור נקודות של S_1, S_2. האם מספיק להניח ש S_1, S_2 סגורות?