# פתרונות לתרג' 3

1

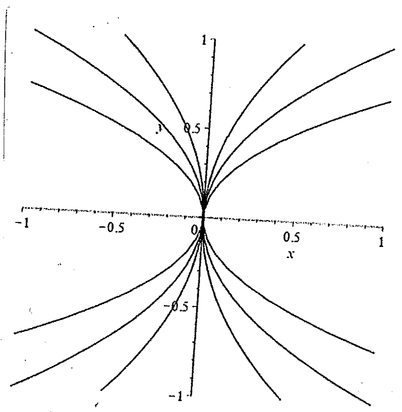
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

נבדוק רציפות בראשית

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{k^2\cdot x^2}{x}=\lim_{x\to 0}k^2\cdot x=0$$

$$\lim_{\substack{y^2=x\\ x\to 0}}\frac{x}{x}=1$$

לכן קיבלנו שלאורך קו"ם ישרים $y=k\cdot x$
הפונק' שואפת ל-0 אך לפי פרבולה $x=y^2$
היא שואפת לערך 1
לכן הגבול בראשית לא קיים והפונק'
לא רציפה ב $(0,0)$.




נתבונן בקווי רמה
של המשטח

$$\frac{y^2}{x}=c$$

עבור קו רמה $c=1$
(כלומר קו חיתוך בגובה
$z=1$ עם המשטח)
ניתן לשים לב שעבור
$x\to 0$ גם $y\to 0$
כלומר בהתקרבות לראשית דרך $y^2=x$
הערך של הפונק' שואף ל-1 ולפי $y^2=2x$ הפונק'
שואפת לערך 2. לכן היא לא רציפה בראשית

ב

$\mathbb{R}^n \supseteq D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ - רציפה $\Longleftrightarrow$

$\Leftarrow$ כל הרכיבים שלה $\bar{f}=(f_1,\dots,f_m)$ - רציפים.

$f(x)$ - רציפה במקום $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$ אם קיים גבול

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad (*)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0:\ \|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$$

אבל

$$\|f(x)-f(a)\| = \sqrt{(f_1(x)-f_1(a))^2+\dots+(f_m(x)-f_m(a))^2} \geq |f_i(x)-f_i(a)|$$

$$\forall i=\overline{1,m}$$

כלומר אם גבול $(*)$ קיים אז מתקיים

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0:\ \|x-a\|<\delta \Rightarrow |f_i(x)-f_i(a)|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to a} f_i(x) = f_i(a) \quad \forall i=\overline{1,m}$$

$\Rightarrow$

אם כל הרכיבים של $f$ רציפים מתקיים

$$\forall i=\overline{1,m} \qquad \lim_{x\to a} f_i(x) = f_i(a) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta_i>0:\ \|x-a\|<\delta_i \Rightarrow |f_i(x)-f_i(a)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$

$$\|f(x)-f(a)\| = \sqrt{(f_1(x)-f_1(a))^2+\dots+(f_m(x)-f_m(a))^2}$$
$$< \sqrt{\underbrace{\frac{\varepsilon^2}{m}+\dots+\frac{\varepsilon^2}{m}}_{m \text{ פעמים}}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

סה"כ

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0:\ \|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

הפונ' רציפה בנק' $x=a$

2 א

i

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2-y^2)}{|x|+|y|}$$

$$0 \le \frac{|\sin(x^2-y^2)|}{|x|+|y|} \le \frac{|x^2-y^2|}{|x|+|y|} \le \frac{|x|^2}{|x|+|y|} + \frac{|y|^2}{|x|+|y|} \le$$

$$\le \frac{|x|^2}{|x|} + \frac{|y|^2}{|y|} = |x|+|y| \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} 0$$

לכן הגבול קיים ושווה לאפס.

ii

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \tan\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$$

$\tan t$ - פונקציה רציפה בסביבת הנק' $t=0$

לכן נתבונן בפונקציה $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

$$0 \le \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \le \frac{|xy^2|}{y^2} = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ולכן מרכיבה של $\tan t$ מקבלים

$$\lim_{t\to 0} \tan t = \tan(0) = 0$$

לכן הגבול קיים ושווה לאפס.

iii

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נחשב את הגבול לפי המסלול $x\to 0, y=0$

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} \frac{\ln(1+x)}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{-x} = -1 \end{cases}$$

לכן הגבול לא קיים

(iv)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{x^4+y^4+z^4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$0 \le \frac{x^4+y^4+z^4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z^4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\le \frac{x^4}{|x|} + \frac{y^4}{|y|} + \frac{z^4}{|z|} = |x|^3 + |y|^3 + |z|^3 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}]{} 0$$

(ב)

נניח שקיימים

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(x) = \bar{A}, \quad \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(x) = \bar{B}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|f(x) - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|A - B\| = \|A - f(x) + f(x) - B\| \le$$

$$\le \|f(x) - A\| + \|f(x) - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon$$

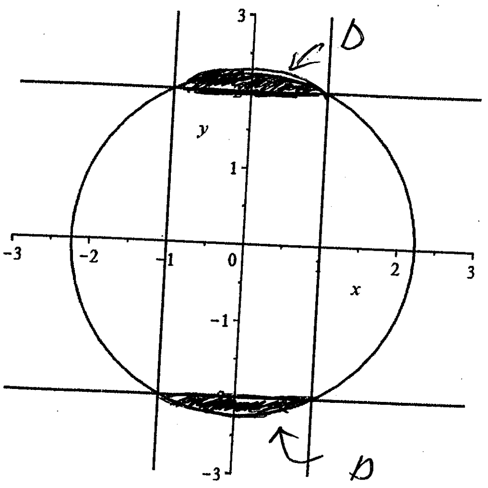
לכן

$$\forall \varepsilon > 0, \ 0 \le \|A - B\| < \varepsilon \Rightarrow \|A - B\| = 0 \Rightarrow A = B$$

(3 2

$$f(x,y) = \sqrt{y^2-4}\cdot \ln(5-x^2-y^2)$$

תחום הגדרה




$$\begin{cases} y^2-4 \geq 0 \\ 5-x^2-y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 \geq 4$$

$y \leq -2$ או $y \geq 2$

לכן

$$5-x^2 > y^2 \geq 4$$

לכן $5-x^2 > 4 \rightarrow x^2 < 1$ לכן $-1 < x < 1$

לכן הפונק' מוגדרת בתוך המעגל $x^2+y^2<5$
כך שמתקיים תנאים $-1<x<1$, $y \geq 2$, $y \leq -2$,

<u>קו רמה</u> אפס מתקבל עבור

$$\sqrt{y^2-4}\cdot \ln(5-x^2-y^2) = 0$$

$y = \pm 2$ כאשר $-1 < x \leq 1$

$\ln(\ ) = 0$

$5-(x^2+y^2) = 1$

מעגל $\rightarrow x^2+y^2 = 4$ לא בתחום ההגדרה

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to -2}} \sqrt{y^2-4}\cdot \ln(5-x^2-y^2) = \sqrt{4-4}\cdot \ln(1) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to \sqrt{5}}} \sqrt{y^2-4}\cdot \ln(5-x^2-y^2) = \sqrt{1}\cdot \ln(0) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1^- \\ y\to 2^+}} \sqrt{y^2-4}\cdot \ln(5-x^2-y^2)$$

לפי מסלול $y=2$ כאשר $x\to 1^-$
הפונ' מתאפסת.

ניתן לפי קטע שעל המעגל $x^2+y^2=5$
הפונ' שואפת לאינסוף.

לכן נבחר מסלול נוסף כדי להראות
שהגבול לא קיים.

נסמן

$$t=5-x^2-y^2 \xrightarrow[\substack{x\to 1 \\ y\to 2}]{} 0$$

$$\Downarrow$$

$$y^2-4=1-x^2-t$$

$$\lim_{\substack{x\to 1^- \\ t\to 0^+}} \sqrt{1-x^2-t}\cdot \ln t$$

נבדוק על ההתנהגות של הפונקציה על
המסלול $t=e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2-e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}}\cdot \ln\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^-} \frac{-\sqrt{1-x^2-e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}}}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-1)^2}$$

$$=-\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1+x}}{1-x} = -\infty$$

③ ii

$|y|+|z| \le 1 \rightarrow$ מנסרה ריבועית

$x^2+y^2>2 \rightarrow$ תחום מחוץ לגליל

פנים של קבוצה $A^\circ$ - כל הנקודות הפנימיות (ללא שפה) ולכן

$$A^\circ = \{x^2+y^2>2\} \cup \{|y|+|z|<1\}$$

סגור של קבוצה $A \cup \partial A = \bar{A}$

כאשר $\partial A = \bar{A} - A^\circ$

לכן סגור של הקבוצה

$$\{|y|+|z| \le 1 \cup x^2+y^2 \ge 2\}$$

הקבוצה אינה סגורה כי כל הנקודות הגבוליות מהצורה $x^2+y^2=2$ אינן שייכות לקבוצה

הקבוצה אינה פתוחה כי כל הנק' הגבוליות מהצורה $|y|+|z|=1$ שייכות לשפה, שייכות גם לקבוצה

והקבוצה אינה חסומה $\forall M>2$

$$x^2+y^2>M>2$$

iii

$$S^{n-1}=\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$$

הקבוצה חסומה ע"י כדור ברדיוס 2 $(B_2(\bar{0}) \supseteq S^{n-1})$

נשים לב

רציפה $\rightarrow f(\bar{x})=\|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \{1\}$

$$S^{n-1}=f^{-1}(\{1\}) .$$

קבוצה סגורה

ולכן $S^{n-1}$ - סגורה (לפי משפט (*))

(*) משפט: אם $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ - רציפה, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ - פתוחה

$F^{-1}(U)=\{\forall v \in \mathbb{R}^n : f(v) \in U\}$ - פתוחה

א) איחוד של קבוצות פתוחות פתוח

נכון

נניח $x \in \bigcup_\alpha U_\alpha$

$\Downarrow$

$\exists \alpha_0 : x \in U_{\alpha_0}$

$\Downarrow$

$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U_{\alpha_0}$

קבוצה פתוחה

$\Downarrow$

$B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$

איחוד כלשהו של קבוצות סגורות

לא סגור

לדוגמא $F_n = [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \to$ סגורה $\forall n \in \mathbb{N}$

אך $\bigcup_n F_n = (0,1)$ - לא סגור

ב) חיתוך של קבוצות סגורות סגור

$F = \bigcap_n F_n$

נבחר

$x_n \in F ; x_n \to x \Rightarrow \forall i, F_i \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

אך $F_i$ - סגורה $\forall i \Leftarrow \forall i \; x \in F_i$

$\Leftarrow x \in F$

חיתוך של קבוצות פתוחות אינו פתוח במקרה כללי

לדוגמא:

$F_n = (1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \to \{1\}$ - פתוחה $\forall n \in \mathbb{N}$

אינה פתוחה.

ג) $X \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^m$ - פתוחות

אז $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ - פתוחה

$X, Y$ - פתוחות

$\exists \varepsilon_1 > 0 \;!\; B_{\varepsilon_1}(x^0) \subseteq X \iff \|x - x^0\| < \varepsilon_1/2$

$\exists \varepsilon_2 > 0 \;!\; B_{\varepsilon_2}(y^0) \subseteq Y \iff \|y - y^0\| < \varepsilon_2/2$

נבחר

$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

$$\|(x,y) - (x^0, y^0)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - y_i^0)^2}$$

$$\le \|x - x^0\| + \|y - y^0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר

$\exists \varepsilon > 0 \;!\; (x,y) \in B_\varepsilon(x^0, y^0) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x^0) \times B_{\varepsilon_2}(y^0)$

אם $X, Y$ - קומפקטיות אז $X \times Y$ - קומפקטית

נבחר סדרה

$(x_n, y_n) \in X \times Y$

$\Downarrow$

$x_n \in X$, $y_n \in Y$

$X, Y$ - קבוצות קומפקטיות לכן קיימות תת סדרות

$x_{n_k} \in X$ : $x_{n_k} \to x$ ו- $x \in X$

$y_{n_k} \in Y$ : $y_{n_{k_j}} \to y$ ו- $y \in Y$

לכן

$(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to (\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$

$X \times Y$ - קבוצה קומפקטית

5

$$\rho(x,y) = dist(x,y) = \|x-y\| : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$\rho(x,y)$ רציפה בנק' $(x_0,y_0)$ אם

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \mid \|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \Rightarrow$$
$$|\rho(x,y)-\rho(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

לפי אי שוויון המשולש מקבלים

$$|\rho(x,y)-\rho(x_0,y_0)| \le |\rho(x,y)-\rho(x_0,y)| + |\rho(x_0,y)-\rho(x_0,y_0)|$$
$$\le \rho(x,x_0)+\rho(y,y_0) \longrightarrow 0$$

עבור $x\to x_0$, $y\to y_0$

עכשיו

$$dist(x_0,S) = \inf\{dist(x_0,x) \mid x\in S\}$$

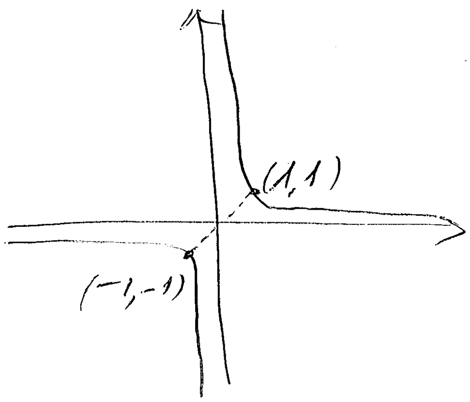
נחשב מרחק בין $(0,0)$ ל- $S=\{x\cdot y=1\}\subseteq\mathbb{R}^2$

נבחר את הנקודה $(x,y)\in S$ כך ש- $x\neq 0,\ y=\frac{1}{x}$

$$dist((x,y),S) = \sqrt{(x-0)^2+\left(\frac{1}{x}-0\right)^2} = f(x)$$

נמצא את מינימום עבור הפונק'

$$g(x) = x^2+\frac{1}{x^2}$$
$$g'(x) = 2x-\frac{2}{x^3} = \frac{2(x^4-1)}{x^3} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x=\pm 1$$




$$g''(x) = 2-\frac{6}{x^4}$$
$$g''(\pm 1) = 2-6 < 0 \quad \text{min}$$

לכן עבור $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ הפונק' $f(x)$ מקבלת ערך מינימלי

$$dist(\bar{x}_0,S) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

נשבין

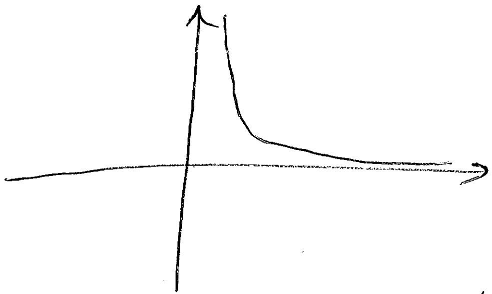
$$dist(S_1,S_2) = \inf\{dist(x_1,x_2) : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$$

אם $S_1, S_2$ - קבוצות קומפקטיות אזי $S_1 \times S_2$ - קומפקטית
ולכן פונק' כנ"ל על תחום קומפקטי מקבלת ערך מינימלי שלה, כלומר,

$$\exists x^* \in S_1, y^* \in S_2 \mid dist(x^*,y^*) = dist(S_1,S_2)$$

הנחה ש- $S_1, S_2$ - סגורות ולא חסומות לא מספיקה לדוגמא

$$S_1 = \{(x,y) : x \geq 1, y = \tfrac{1}{x}\}$$
$$S_2 = \{(x,y) : x \geq 1, y = 0\} \Rightarrow dist(S_1,S_2)=0$$



אך לא קיימים $x^*, y^*$ כך
שערך מינימלי מתקבל

אך הטענה עדין נכונה אם
אחת משתי קבוצות קומפקטית ושניה סגורה.
נסמן

$$dist(S_1,S_2) = \sigma$$

$S_1$ - קומפקטית $\Leftarrow$

$$\exists R>0 : S_1 \subseteq B_R(\bar{0})$$

לכן אם נבחר $x^* \in S_1$ , $y^* \in S_2$ כך ש-

$$y^* \notin B_{R+\sigma+1}(\bar{0})$$

נקבל ש-

$$\|x^* - y^*\| > \sigma+1$$

לכן

$$dist(S_1,S_2) = dist(S_1, S_1 \cap \bar{B}_{R+\sigma+1}(\bar{0}))$$

קבוצה $S_1 \cap \bar{B}_{R+\sigma+1}(\bar{0})$ - קומפקטית כי זה חיתוך של שתי קבוצות סגורות והסומה בתוך הכדור סגור
ולכן לפי הטענה הקודמת המרחק מתקבל.