חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 4.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. עבור פונקציות הבאות תחום ההגדרה אינו קבוצה סגורה. לאיזה תחום (הגדול ביותר) ניתן להרחיב את הפונקציה בצורה רציפה?

i. $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ ii. $f(x,y)=\frac{x^2y}{|x|^3+|y|}$ iii. $f(x,y)=\frac{(x-1)(y-2)^2}{(x-1)^2+sin^2(y-2)}$

iv. $f(x,y)=x\cdot ln(x^2+3y^2)$ v. $f(x,y)=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{y}$ vi. $f(x,y,z)=\frac{sin(x+y+z)-sin(x+y-z)}{z}$.

2. (א) האם הקבוצות הבאות קומפקטיות/קשירות מסילתית?

i. $\{(\frac{1}{t^2},\frac{1}{t^3})|\ t\in(1,\infty)\}\cup\{0,0\}\subset\mathbb{R}^2$ ii. $\{r=\frac{1}{1+\phi}|\ \phi\in[1,\infty)\}\cup\{(0,0)\}\subset\mathbb{R}^2$ כאן (r,ϕ) -קוטביות

iii. $\{x^2=y^2+z^2-1\}\cap\partial Ball_3(0,0,0)\subset\mathbb{R}^3$ iv. $\{y^2=x^2+z^2+1,\ y+10=x^2+z^2\}\subset\mathbb{R}^3$.

(ב) תהי $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=sin(x_1-x_2^3)+e^{x_4-x_3^4}+sin(x_2)\cdot cos(x_1)-100$. נגדיר קבוצות:

$X_< := \{\underline{x}\in\mathbb{R}^4|\ f(\underline{x})<0\}$, $X_= := \{\underline{x}\in\mathbb{R}^4|\ f(\underline{x})=0\}$, $X_\leq := \{\underline{x}\in\mathbb{R}^4|\ f(\underline{x})\leq 0\}$.

האם הן קבוצות פתוחות/סגורות? מה השפה והפנים שלהן?

(ג) נגדיר טורוס: $S^1\times S^1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|\ x_1^2+x_2^2=1=x_3^2+x_4^2\}\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$. האם הוא קומפקטי/קשיר מסילתית?

3. (א) תהי $\mathbb{R}^m \xleftarrow{f} \mathscr{D}_f\subseteq\mathbb{R}^n$ פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית/קשירה מסילתית. הוכיחו: הגרף, Γ_f, הינו קבוצה קומפקטית/קשירה מסילתית.

(ב) הוכיחו: $S^{n-1}:=\{\underline{x}|\ ||\underline{x}||=1\}\subset\mathbb{R}^n$, $n>1$, הינה קבוצה קומפקטית וקשירה מסילתית.

(ניתן לעשות זאת בדרכים שונות. למשל, הציגו $S^{n-1}=\Gamma_{f_+}\cup\Gamma_{f_-}$, כאשר $\Gamma_{f_\pm}$ הינם הגרפים של פונקציות $f_\pm=\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}$.)

(ג) נגדיר $X:=\{3x_1^4+2x_2^5+7x_3^3+12x_4^6=1\}\subset\mathbb{R}^4$. הוכיחו: קבוצה $\mathbb{R}^4\setminus X$ לא קשירה מסילתית.

(ד) תהי $S\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית/קשירה מסילתית. נקבע $A\in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\underline{v}\in\mathbb{R}^m$ ונגדיר העתקה $f_{A,\underline{v}}$ ע"י $\mathbb{R}^m\ni\underline{v}+A\cdot\underline{x}\leftarrow\underline{x}\in\mathbb{R}^n$.
הוכיחו/הפריכו: קבוצה $f_{A,\underline{v}}(S)$ קומפקטית/קשירה מסילתית.

4. הוכיחו/הפריכו:

(א) $X\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית אמ"מ כל ההיטלים שלה על צירי קואורדינטות, $\pi_j(X)\subset\mathbb{R}^1$, הן קבוצות קומפקטיות.

(ב) איחוד סופי של קבוצות קשירות מסילתית הינו קשיר מסילתית.

(ג) חיתוך סופי של קבוצות קשירות מסילתית הינו קשיר מסילתית.

(ד) אם $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^m$ קבוצות קומפקטיות/קשירות מסילתית אז גם $A\times B\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ קומפקטית/קשירה מסילתית.

5. נגדיר קואורדינטות קוטביות ב $\mathbb{R}^n$ ע"י: $r=\sqrt{\sum x_i^2}$, $\left\{\phi_j=arccos\frac{x_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^j x_i^2}}\in[0,\pi]\right\}_{j=3,\dots,n}$,
ו $\phi_2\in[0,2\pi)$ נקבע ע"י $\phi_2=arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$.

(א) ודאו שעבור $n=2,3$ מקבלים את הקואורדינות הקוטביות הרגילות ב $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$. למה עבור זוית ϕ_2 נדרשים שני ביטוים?

(ב) רשמו את נוסחאות המעבר $\underline{x}\leftarrow(r,\underline{\phi})$.

(ג) בדקו שתחום הגדרה של $(r,\underline{\phi})\leftarrow\underline{x}$ הינו $\mathbb{R}^n\setminus\{x_1^2+x_2^2=0\}$ והתמונה היא $\mathbb{R}_{>0}\times(0,\pi)^{n-2}\times[0,2\pi)$.

(ד) בדקו האם העתקות $\mathbb{R}^n\setminus\{x_1^2+x_2^2=0\}\ni\underline{x}\leftrightarrow(r,\underline{\phi})\in\mathbb{R}_{>0}\times(0,\pi)^{n-2}\times[0,2\pi)$ הן רציפות, חח"ע ועל.

(ה) הסיקו שוב כי ספירה $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ הינה קבוצה קומפקטית וקשירה מסילתית.