חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 5.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. במקרים הבאים הפונקציות לא מוגדרות על $\mathbb{R}^2$ כולו. לאיזה תחום (הגדול ביותר) ניתן להרחיב את הפונקציות כך שיישארו: רציפות/בעלות נגזרות חלקיות/דיפרנציאביליות/בעלות נגזרות חלקיות רציפות?

   i. $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ ii. $f(x,y)=\frac{ln|\frac{x}{y}|}{x-y}$ iii. $f(x,y)=x\cdot sin(\frac{y}{\sqrt{|x|}})$.

2. חשבו את מטריצת יעקובי עבור פונקציות הבאות: i. המעבר לקואורדינטות קוטביות ב $\mathbb{R}^2$, והמעבר ההפוך.

   ii. $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\xrightarrow{f}\mathbb{R}^3$, $f(\vec{v},\vec{u})=\vec{v}\times\vec{u}$ iii. $\mathbb{R}^n\xrightarrow{f_A}\mathbb{R}^m$, $f_A(\underline{x})=A\cdot\underline{x}$ כאן $A\in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

   iv. $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}^2$, $f=\underbrace{g\circ g\circ\ldots\circ g}_{n\ times}$, כאשר $g(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ והנקודה: $(1,0)$.

   v. $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^n$, $f(\vec{v},\vec{u})=\vec{v}+\vec{u}$.

3. (א) תהי $\mathbb{R}^1\xrightarrow{f}\mathbb{R}^1$ גזירה. הוכיחו כי פונקציה $z(x,y)=e^y\cdot f(y\cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}})$ מקיימת: $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$.

   (ב) תהי $\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^1$ דיפרנציאבילית והומוגנית מסדר p (כלומר מקיימת: $f(t\cdot\underline{x})=t^pf(\underline{x})$ עבור כל $t\in\mathbb{R}$, $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$). הוכיחו: $\sum x_i\cdot\partial_i f=p\cdot f$.

   (ג) תהי $g(x,y,z)=f(x^2-2y^3+z^4)$, כאשר $\mathbb{R}^1\xrightarrow{f}\mathbb{R}^1$ פונקציה גזירה ברציפות עם נגזרת לא מתאפסת. הוכיחו: $\frac{y^2z^3\partial_xg+xz^3\partial_yg+xy^2\partial_zg}{f'(x^2-2y^3+z^4)}$ הינו קבוע ומצאו את הקבוע.

   (ד) מצאו את הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=ln(x^2+y^2)$ בנקודה $M=(x_0,y_0)$ בכיוון שניצב לקו רמה של $f(x,y)$, ועובר דרך הנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

   (ה) מצאו את כל הנקודות בהן נגזרת מכוונת של פונקציה $f(\underline{x})=\sum_{j=1}^{n}sin^2(x_j+a_j)$ בכוון $(1,2,\ldots,n)$ מקבלת את הערך הקטן ביותר. (כאן $\{a_j\}$ קבועים)

   (ו) תהי $f(x,y,z)=arcsin(\sqrt{\frac{xz}{y^2}})$. הוכיחו כי $x\cdot\partial_xf+y\cdot\partial_yf+z\cdot\partial_zf$ הנו קבוע ומצאו את הקבוע הזה. מצאו את כוון העליה התלולה ביותר ואת כוון הירידה התלולה ביותר של $f(x,y,z)$ בנקודה $(3,4,5)$.

   (ז) תהי $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות. נתון: $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(-3,6)}=-2$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(-3,6)}=1$. נגדיר $g(u,v,w)=f(u^2-v^2,u^2vw)$. חשבו את המכפלה הפנימית $\langle grad(g)|_{(1,2,3)}\cdot(1,1,1)\rangle$.

   (ח) חשבו את הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ בנקודה $(0,0)$ בכיוון $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$. האם התשובה תואמת להצגה הקוטבית $r\cdot\frac{sin^2(\theta)}{cos(\theta)}$?

4. (א) טיפת דיו נעה לאורך המשטח $\{z=ax^2+by^2\}\subset\mathbb{R}^3$, $a,b>0$. בכל רגע נעה בכיוון הירידה התלולה ביותר. קבלו את משוואת העקום לאורכו נעה הטיפה.

   (ב) חלקיק נע לאורך הספירה, $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$. נניח שפונקצית מיקום שלו, $\mathbb{R}^1\xrightarrow{x(t)}S^{n-1}$, הינה דיפרנציאבילית. הוכיחו: בכל רגע המהירות של החלקיק $(\frac{d\underline{x}(t)}{dt})$ מאונכת לווקטור $\underline{x}(t)$.