פתרונות לדף 5

1. א. f לא מוגדרת בראשית. נשים לב כי

$$0 \le \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{xy^2}{2xy}\right| \le |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 .$$

לכן f ניתנת להרחבה לפונקציה $\tilde{f}$ אשר רציפה ב- $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \qquad \text{otherwise} \end{cases} .$$

נבדוק דיפרנציאביליות ברשאית, לשם כך נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}=0 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)}{y}=0 .$$

נרשום:

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)+\varepsilon\sqrt{x^2+y^2} ,$$

מכאן

$$\varepsilon(x,y)=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} .$$

נשים לב כי

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2^{3/2}x^3}=\frac{1}{2^{3/2}}\neq 0 ,$$

לכן f לא דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

קל להשתכנע כי הנגזרות החלקיות של f הינן רציפות ב- $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ולא רציפות ב- $(0,0)$ (אחרת f הייתה דיפרנציאבילית בראשית).

ב. f לא מוגדרת ב"אלכסון", דהיינו בקבוצה $A=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$.

נראה תחילה כי f לא ניתנת להרחבה ב- $(0,0)$ לפונקציה רציפה. אכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{if\ exists}{=} \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left|\frac{1}{m}\right|}{(1-m)x} = \pm\infty .$$

נניח כי $x,y\neq 0$. נסמן:

$$\varepsilon(x,y)=\frac{x}{y}-1 ,$$

מכאן

$$x-y=y\varepsilon(x,y) .$$

אז אם $x-y\to 0$ (ו- $y\to y_0\neq 0$) מתקיים:

$$\varepsilon(x,y)\to 0 ,$$

מכאן נקבל

$$\frac{\ln\left|\frac{x}{y}\right|}{x-y}=\frac{1}{y}\cdot\frac{\ln|1+\varepsilon|}{\varepsilon}\underset{(\varepsilon,y)\to(0,y_0)}{\to}\frac{1}{y_0}$$

(צפוי, לא? זה "כאילו" חישוב הנגזרת של $\ln x$: $\lim_{y\to x}\frac{\ln x-\ln y}{x-y}=\ln'(x)=\frac{1}{x}$).

לכן f ניתנת להרחבה לפונקציה $\tilde{f}$ אשר רציפה ב- $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), x\neq y\\ 1/y, \quad x=y\neq 0\end{cases} .$$

עתה נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה (x_0,x_0) ל- $x_0\neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x,x_0)-f(x_0,x_0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\frac{x_0+x}{x_0}}{x}-\frac{1}{x_0}}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x_0\ln\left(1+\frac{x}{x_0}\right)-x}{x_0x^2}\underset{\text{L'Hopital}}{=}\cdots=-\frac{1}{2x_0^2} ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x_0,x_0+y)-f(x_0,x_0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\ln\frac{x_0}{x_0+y}}{-y}-\dfrac{1}{x_0}}{y}=$$

$$.-\lim_{y\to 0}\frac{x_0\ln\frac{x_0}{x_0+y}+y}{x_0y^2}\underset{\text{L'Hopital}}{=}\cdots=-\frac{1}{2x_0}$$

נחשב את הנגזרת החלקית לפי x:

$$.\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(1-y/x)+\ln y-\ln x}{(x-y)^2}$$

מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(1-y/x)+\ln y-\ln x}{(x-y)^2}=\left[\varepsilon(x,y)=1-y/x\right]=$$

$$,\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{-\varepsilon+\ln(1+\varepsilon)}{x^2\varepsilon^2}=\lim_{(x,\varepsilon)\to(x_0,0)}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\ln(1+\varepsilon)-\varepsilon}{\varepsilon^2}\underset{\text{L'Hopital}}{=}\cdots=-\frac{1}{2x_0^2}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_0)$$

כלומר $\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפה ב- (x_0,x_0). את הרציפות של $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפה ב- (x_0,x_0) מראים בדומה. לכן $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

ג. f לא מוגדרת בציר ה- y. מתקיים:

$$,0\le\left|x\sin\frac{y}{\sqrt{|x|}}\right|\le\left|x\frac{y}{\sqrt{|x|}}\right|=\left|y\sqrt{|x|}\right|\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

לכן f ניתנת להרחבה לפונקציה $\tilde{f}$ אשר רציפה ב- $\mathbb{R}^2$:

$$.\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & x\ne 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

נבדוק דיפרנציאביליות ב- $(0,0)$, לשם כך נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

$$.\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

נרשום:

$$,\ f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)+\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$$

מכאן

$$.\ \varepsilon(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{y}{\sqrt{|x|}}$$

נשים לב כי

$$,\ 0\le\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{y}{\sqrt{|x|}}\right|\le\left|\frac{x}{\sqrt{2xy}}\cdot\frac{y}{\sqrt{|x|}}\right|\le\left|\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}}\right|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

לכן f דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

נשים לב כי $\frac{\partial f}{\partial x}$ בנקודה $(0,y_0)$ לא קיימת, אכן

$$,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y_0)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{y_0}{\sqrt{|x|}}$$

לכן f לא דיפרנציאבילית בנקודות מן הצורה $(0,y_0)$ ל- $y_0\neq 0$.

2. א. מטריצת יעקובי למעבר לקואורדינטות קוטביות היא:

$$.\ J=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

מטריצת יעקובי של "המעבר בחזרה", דהיינו של ההעתקה:

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan\frac{y}{x}\end{cases}$$

היא

$$. J=\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

ב. נרשום את הפונקציה בצורה מפורשת:

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\right)=\left(x_1,x_2,x_3\right)\times\left(x_4,x_5,x_6\right)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix}=$$

$$.\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix}=\left(x_2x_6-x_3x_5, x_3x_4-x_1x_6, x_1x_5-x_2x_6\right)$$

מכאן

$$. J=\begin{pmatrix} 0 & x_6 & -x_5 & 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_6 & 0 & x_4 & x_3 & 0 & -x_1 \\ x_5 & -x_6 & 0 & 0 & x_1 & -x_2 \end{pmatrix}$$

ג. נרשום את הפונקציה בצורה מפורשת:

$$. f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

מכאן

$$. J=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=A$$

ד. מתקיים:

$$. \ J=\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

נשים לב כי $g(1,0)=(1,0)$. מכלל שרשרת נקבל כי

$$. \ J_f(1,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$$

ה. נרשום את הפונקציה בצורה מפורשת:

$$, \ f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$$

מכאן

$$. \ J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. א. נסמן $t(x,y)=ye^{\frac{x^2}{2y^2}}$. אזי

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^y\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=e^y\frac{df}{dt}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

ו-

$$. \ \frac{\partial z}{\partial y}=e^y f(t)+e^y\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=e^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)+e^y\frac{df}{dt}\left(e^{\frac{x^2}{2y^2}}+ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(-\frac{x^2}{y^3}\right)\right)$$

לכן

$$. \ xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz+xye^y\frac{df}{dt}e^{\frac{x^2}{2y^2}}-e^y\frac{df}{dt}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\frac{x^3}{y} \ , \ (x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}=e^y\frac{df}{dt}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(\frac{x}{y^2}\right)(x^2-y^2)$$

מכאן

$$. \ (x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$$

ב. נגזור את המשוואה

$$f\left(\lambda x,\lambda y,\lambda z\right)=\lambda^n f\left(x,y,z\right)$$

לפי λ (תוך שימוש בכלל שרשרת):

$$x\frac{\partial f}{\partial x}\left(\lambda x,\lambda y,\lambda z\right)+y\frac{\partial f}{\partial y}\left(\lambda x,\lambda y,\lambda z\right)+z\frac{\partial f}{\partial z}\left(\lambda x,\lambda y,\lambda z\right)=n\lambda^{n-1}f\left(x,y,z\right),$$

נציב $\lambda=1$ ונקבל את הנדרש.

ג. נסמן:

$$t\left(x,y,z\right)=x^2-2y^3+z^4.$$

ע"פ כלל שרשרת:

$$\frac{y^2z^3\frac{\partial g}{\partial x}+xz^3\frac{\partial g}{\partial y}+xy^2\frac{\partial g}{\partial z}}{f'\left(t\right)}=\frac{y^2z^3f'\left(t\right)\left(2x\right)+xz^3f'\left(t\right)\left(-6y^2\right)+xy^2f'\left(t\right)\left(4z^3\right)}{f'\left(t\right)}\underset{f'(t)\neq 0}{=}0.$$

ד. קווי הרמה של הפונקציה הנתונה הם מעגלים קונצנטריים שמרכזם בראשית. עלינו לחשב את הנגזרת הכיוונית של $f\left(x,y\right)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ בכיוון הוקטור $v=\left(x_0,y_0\right)$. היות ו- f דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(0,0\right)\right\}$ מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{v}}\left(x,y\right)=\nabla f\left(x,y\right)\cdot\hat{v},$$

מכאן

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{v}}\left(x_0,y_0\right)=\left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2},\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)\cdot\frac{\left(x_0,y_0\right)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

ה. נסמן

$$v=\left(1,2,\ldots,n\right).$$

מכיוון ש- $f\left(\mathbf{x}\right)$ הינה דיפרנציאבילית, מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(\mathbf{x}\right)=\nabla f\left(\mathbf{x}\right)\cdot v=\sum_{j=1}^{n}2j\sin\left(x_j+a_j\right)\cos\left(x_j+a_j\right)=\sum_{j=1}^{n}j\sin2\left(x_j+a_j\right).$$

כל בחירה של $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ כך ש-

$$2\left(x_j+a_j\right)=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ \ 1\le j\le n,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

תספק ערך $-\frac{n\left(n+1\right)}{2}$ לנגזרת הכיוונית שהוא הערך המזערי.

ו. נסמן:

$$.\,t\left(x,y,z\right)=\sqrt{\frac{xz}{y^2}}$$

ע"פ כלל שרשרת:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=xf'\left(t\right)t'_x+yf'\left(t\right)t'_y+zf'\left(t\right)t'_z=$$

$$x\cdot f'\left(t\right)\cdot\frac{\operatorname{sgn}y}{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{z}{x}}-y\cdot f'\left(t\right)\cdot\frac{\operatorname{sgn}y}{y^2}\cdot\sqrt{xz}+z\cdot f'\left(t\right)\cdot\frac{\operatorname{sgn}y}{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{z}}=$$

$$.\ f'\left(t\right)\left(\frac{\operatorname{sgn}y}{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{xz}-\frac{\operatorname{sgn}y}{y}\cdot\sqrt{xz}+\frac{\operatorname{sgn}y}{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{xz}\right)=0$$

העליה המירבית היא בכיוון הגרדיינט:

$$\nabla f\left(3,4,5\right)=\left(f'\left(t\right)t'_x,\ f'\left(t\right)t'_y,\ f'\left(t\right)t'_z\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{\operatorname{sgn}y}{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{z}{x}},-\frac{\operatorname{sgn}y}{y^2}\cdot\sqrt{xz},\frac{\operatorname{sgn}y}{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{z}}\right)\Bigg|_{(3,4,5)}=$$

$$.\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}},-\frac{\sqrt{15}}{4},\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

ז. נשים לב כי $g\left(1,2,3\right)=f\left(-3,6\right)$. ע"פ כלל שרשרת:

$$,\nabla g=\left(f'_xx'_u+f'_yy'_u,\ f'_xx'_v+f'_yy'_v,\ f'_xx'_w+f'_yy'_w\right)=\left(2uf'_x+2uwf'_y,-2vf'_x+u^2wf'_y,u^2vf'_y\right)$$

מכאן

$$\nabla g\left(1,2,3\right)=\left(2f'_x\left(-3,6\right)+6f'_y\left(-3,6\right),-4f'_x\left(-3,6\right)+3f'_y\left(-3,6\right),2f'_y\left(-3,6\right)\right)=$$

$$.\left(2,11,2\right)$$

לכן

$$.\nabla g\left(1,2,3\right)\cdot\left(1,1,1\right)=15$$

ח. נחשב:

$$.\frac{\partial f}{\partial v}\left(0,0\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\left(0,0\right)+t\left(v_1,v_2\right)\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\left(tv_1,tv_2\right)\right)}{t}=\frac{v_2^2}{v_1}$$

4. א. נניח כי

$$s\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$$

שני רכיבים של משוואת התנועה

$$.r\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right),ax^2\left(t\right)+by^2\left(t\right)\right)$$

לפי הנתון היטלו של וקטור המהירות על מישור $z=0$ מקיים:

$$\left(x'\left(t\right),y'\left(t\right)\right)=\lambda\left(-2ax\left(t\right),-2by\left(t\right)\right)$$

עבור איזשהו $\lambda\in\mathbb{R}$.

קיבלנו כי

$$.\frac{dx}{ax}=\frac{dy}{by}$$

מכאן נקבל כי

$$.\ln\left|x\right|^b=\ln\left|y\right|^a+C$$

לכן

$$.\left|x\right|^b=e^C\left|y\right|^a$$

ב. נגדיר פונקציה חדשה $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י

$$.r\left(t\right)=x\left(t\right)\cdot x\left(t\right)$$

מכיוון ש- $x\left(t\right)\in S^{n-1}$, $r\left(t\right)$ הינה פונקציה קבוע, לכן $r'\left(t\right)=0$, כלומר

$$0 = r'(t) = \left(x(t)\cdot x(t)\right)' = 2x(t)\cdot x'(t).$$

קיבלנו כי $x(t)\perp x'(t)$.