חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 6.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. (א) מצאו את משוואת מישור המשיק לגרף של פונקציה $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot A \cdot \underline{x}^t$, כאן $A^t = A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   (ב) תהי $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית. עבור כל ישר, הנמצא בתוך המישור המשיק לגרף של f בנקודה $\underline{x}_0$, נמדוד את השיפוע. (הזווית עם מישור-תחום ההגדרה $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$). מצאו את הזווית הגדולה ביותר.

2. (א) אילו מהקבוצות הבאות קמורות?

   i. $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 \le 1, \\ |x| + |y| \le 2 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ ii. $\left\{ \begin{array}{l} z - x^2 - y^2 > 10, \\ (z-5)^2 + x^2 \le 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

   iii. $\{|x|+|y|+|z|<1\} \subset \mathbb{R}^3$ iv. $Ball_r(\underline{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ v. $\overline{Ball_r(\underline{x}_0)} \subset \mathbb{R}^n$ vi. $\prod\limits_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^n$.

   (ב) הוכיחו/הפריכו:

   i. איחוד סופי של קבוצות קמורות הינו קמור. ii. חיתוך כלשהו של קבוצות קמורות הינו קמור.

   iii. קשירות מסילתית+קומפקטיות גורר קמירות. iv. המשלים של קבוצה חסומה (ולא ריקה) בהכרח לא קמור.

3. פונקציה $\mathbb{R}^2 \supseteq \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1$ נקראת בלתי תלויה ב y אם קיימת $g(x)$ כך ש $f(x,y) = g(x)$, עבור כל $(x,y) \in \mathscr{D}_f$.

   (א) נניח ש f דיפרנציאבילית בקבוצה קמורה $\mathscr{D}_f$ ומתקיים $\partial_y f = 0$. הוכיחו: f בלתי תלויה ב y.

   (ב) תנו דוגמא של $\mathscr{D}_f$ קשירה מסילתית אך לא קמורה, כך ש $\partial_y f = 0$, על $\mathscr{D}_f$, אבל f לא בלתי תלויה ב y.

4. (א) ניקח קואורדינטות קוטביות (r, ϕ, θ) ב $\mathbb{R}^3$. בטאו את $\partial^2_{xx} f$, $\partial^2_{xy} f$, ... דרך $\partial^2_{rr} f$, $\partial^2_{r\phi} f$, $\partial^2_{\phi\theta} f$, ...

   (ב) נגדיר את ה Laplacian ע"י $\Delta(f) = \partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f + \partial^2_{zz} f$. קבלו את הביטוי עבור $\Delta(f)$ בקואורדינטות קוטביות.

   (ג) נתונה משוואה $\sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, כאן $\{a_i\}$ קבועים. מצאו החלפת משתנים $\underline{x} \leftrightarrows \underline{y}$ שמעבירה את המשוואה ל: $\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$.

5. (א) האם במקרים הבאים מתקיים $\partial^2_{xy} f|_{(0,0)} = \partial^2_{yx} f|_{(0,0)}$?

   i. $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 arctan\frac{y}{x} - y^2 arctan\frac{x}{y}, & x \cdot y \ne 0 \\ 0, & x \cdot y = 0 \end{array} \right.$ ii. $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}: & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$.

   (ב) רשמו את פיתוח טיילור עד סדר שלישי בנקודה $(0,0)$. (מותר להשתמש בטורי טיילור הידועים במשתנה אחד)

   i. $ln(1+x) \cdot cos(y)$ ii. $arctan(\frac{x+y}{1+xy})$ iii. $\frac{sin(x) - sin(y^2)}{e^x + e^y}$.

   (ג) יהיו $P(\underline{x})$, $Q(\underline{x})$ פולינומים ממעלה k, ב n משתנים. נניח ש $\lim\limits_{|\underline{x}|\to 0} \frac{P(\underline{x}) - Q(\underline{x})}{|\underline{x}|^k} = 0$. הוכיחו: $P(\underline{x}) = Q(\underline{x})$.

   (ד) תהי $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ גזירה פעמים ברציפות. נניח ש $\lim\limits_{|\underline{x}|\to 0} \frac{f(\underline{x}) - P(\underline{x})}{|\underline{x}|^2} = 0$, עבור פולינום ממעלה 2. הוכיחו: P בהכרח הפולינום טיילור של f.

6. במקרים הבאים מצאו וסווגו את כל נקודות הקיצון:

   i. $f(x,y) = e^{sin(x)sin(y)}$

   ii. $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ iii. $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot A \cdot \underline{x}^t$, כאן $A = A^t \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.