פתרונות דף 6

(1)

א) נמצא משוואות. מישור משיק לגרף של פונקציה

$$f(x)=\bar{x}\cdot A\cdot\bar{x}^T ;\ R^n\to R \qquad A=A^T\in Mat_{n\times n}(R)$$

פתרון:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\cdot x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=2a_{kk}\cdot x_k+2\sum_{i<k}a_{ik}\cdot x_i+2\sum_{j>k}a_{kj}x_j$$

$$=2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_{ki}x_i \Rightarrow \nabla f(x)=2A\cdot x$$

לכן מישור משיק בנק' $x_0\in R^n$

$$2Ax_0\cdot(x-x_0)=0$$

ב) $f: R^n\to R$ - דיפרנציאבילית.

עבור איזה הנמצא בתוך המישור המשיק לגרף של f בנק' x_0 נמצאה שיפוע (נגזרת) עם מישור תחום הסביבה) נמצא את הנגזרת הכיוונית הגדולה ביותר.

נזכיר כי נגזרות מקסימליות בכיוון של וקטור גרדיאנט לכן שיפוע הכי גדול שווה

$$\|\nabla f\|=\|2Ax\|$$

(2) האם הקבוצה הבאות קמורות?

ii

$$\left\{ \begin{array}{l} z - x^2 - y^2 > 10 \\ (z-5)^2 + x^2 \le 1 \end{array} \right\}$$

לא קמורה

נקח נקודה בגוף הפרבולויד $(0,0,11)$

ונקודה בתוך הגליל $(0,0,5)$.

קומבינציה לינארית שלהן לא שייכת לקבוצה.

iii

<u>הגדרה:</u> $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: Q \to \mathbb{R}$ - פונקציה קמורה

אם לכל $x, y \in Q$ מתקיים

$\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

נוכיח ש- $f(x) = \|x\|$, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

היא פונק' קמורה

$\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) \cdot y) = \|\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y\| \le$$

$$\le \lambda \|x\| + (1-\lambda) \cdot \|y\| = \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y)$$

לכן עבור נורמה

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$B_1(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| \le r \}$$

קבוצה קמורה לפי הטענה (*)

<u>טענה</u> (*) $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: Q \to \mathbb{R}$ - f קמורה.

אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$\{ x \in Q \mid f(x) \le \alpha \}$ - קמורה

(IV) באופן דומה

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x_0\|_2 < r\}$$

קמורה. (באופן דומה V)

(VI) T,S - קמורה אז $S \times T$ קמורה

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in S \times T$$

$$(1-t)(x_1,y_1) + t\cdot(x_2,y_2) = ((1-t)x_1 + t x_2, (1-t)y_1 + t y_2)$$

S- קמורה ולכן עבור $x_1, x_2 \in S$

$$(1-t)\cdot x_1 + t x_2 \in S$$

T- קמורה ולכן עבור $y_1, y_2 \in T$

$$(1-t)\cdot y_1 + t\cdot y_2 \in T$$

$$\Downarrow$$

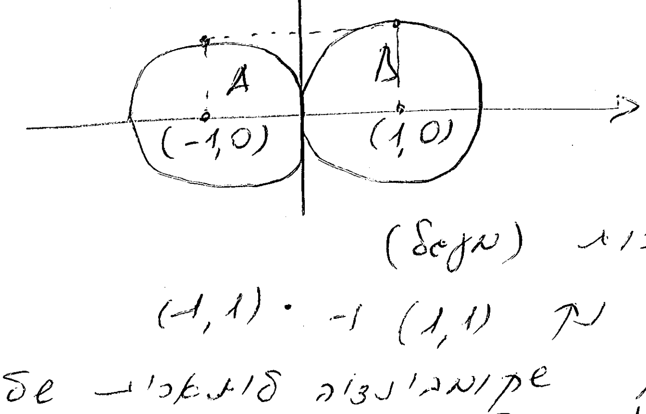
$$((1-t)\cdot x_1 + t\cdot x_2, (1-t)\cdot y_1 + t y_2) \in S \times T$$

לכן $\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ - קמורה.

(ג)

(1) איחוד סופי של קבוצות קמורות קמור

לא נכון



A,B - קמורות (מעגל)

אך עבור נק' (1,1) ו- (-1,1) מקבלים

שקומבינציה לינארית שלהן לא שייכת לאיחוד.

(ii) נכון. חיתוך של קבוצות קמורות קמור

$A \cap B$ – קמורה

$\forall x, y \in A \qquad (1-t)\cdot x + t\cdot y \in A$

$\forall x, y \in B \qquad (1-t)\cdot x + t\cdot y \in B \quad \Rightarrow$

$$(1-t)\cdot x + t\cdot y \in A \cap B$$

$\mathbb{R}^2 \supseteq D_f \quad , \quad f: D_f \to \mathbb{R}^1$ 3

f בלתי תלויה ב y אם קיימת פונק' $g(x)$
כך ש- $f(x,y)=g(x) \quad \forall y \in D_f$

א) f - דיפרנציאבילית ב D_f (קמורה) וגם $\frac{\partial f}{\partial y}=0$
בכל התחום D_f.
הוכיחו כי f בלתי תלויה ב y.

ב) תנו דוגמא של D_f קשירה מסילתית אך
לא קמורה כך ש- $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ על D_f אבל
f לא בלתי תלויה ב y.

פתרון:

נבחר שתי נק'
$a(x_0,y_1) \qquad b(x_0,y_2)$

D_f קמורה לכן קיימת פונק' רציפה
$\gamma(t) = a\cdot t + (1-t)\cdot b \; ; [0,1] \to D_f$
כך ש-
$\gamma(0)=b \; , \; \gamma(1)=a$

לפי משפט ערך ממוצע של לגרנג'

$\exists c \in \gamma(t) : f(b)-f(a) = \nabla f(c)\cdot(b-a)$

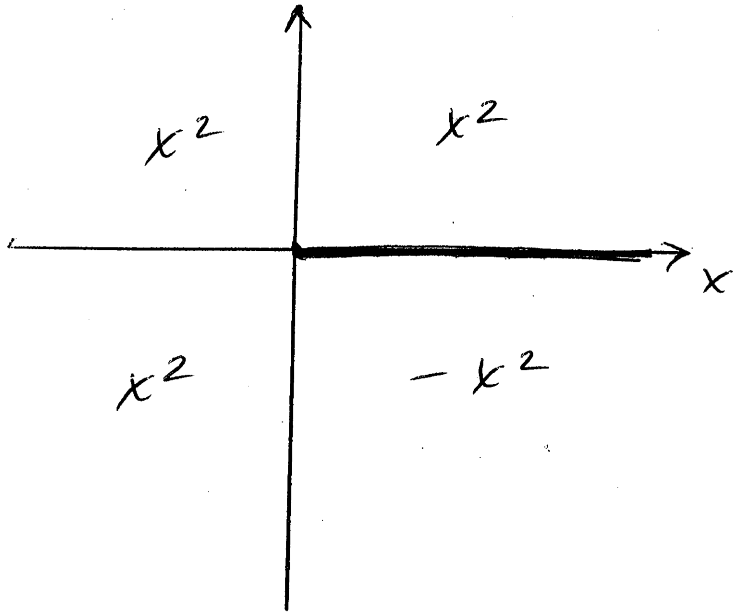
$\bar{b}-\bar{a}=(0,\Delta y) \qquad \nabla f=(f'_x, f'_y)$

לכן מקבלים
$f(b)-f(a) = f'_x(c)\cdot 0 + f'_y(c)\cdot \Delta y$

אך לפי הנתון $f'_y \equiv 0$ לכל התחום D_f
ובפרט על הישר $\gamma(t)$ שמחבר a, b
ולכן $f(a)=f(b) \qquad f(x_0,y_1)=f(x_0,y_2)$

$\exists \overset{\parallel}{g(x)} : \; g(x_0)=f(x_0,y_1)=f(x_0,y_2)$

ב) נציג פונק' בתחום $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0, x>0\}$



$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x^2, & y>0,\ x>0 \\ -x^2, & y<0,\ x>0 \end{cases}$$

הפונק' דיפרנציאבילית בתחום השכנה (בדקו)
$\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0, x>0\}$

התחום לא קמור אך קשיר מסילתית –
אין בעיה

$f(1,1) = 1$
$f(-1,1) = -1$

לכן לא קיימת פונק' $g(x)$ כך ש-

$$f(x,y) = g(x) \quad \forall y$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \qquad u(r,\varphi,\theta) = U(x,y,z)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi\cdot\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi\sin\theta \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\varphi\cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\sin\varphi\cos\theta \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi\sin\theta \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$u'_r = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r} \qquad (1)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\varphi\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\varphi\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\theta$$

$$u'_\theta = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot r\cos\varphi\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot r\sin\varphi\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot(-r\sin\theta) \qquad (2)$$

$$u'_\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-r\sin\varphi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot r\cos\varphi\sin\theta \qquad (3)$$

מהמשוואות (1), (2), (3) מבודדים $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\varphi\cdot\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\varphi\cdot\cos\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\varphi\cdot\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin\varphi\cdot\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

לכן מקבלים

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}$$

נמשך

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) -$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta\partial r}\right) - \frac{\sin\theta\cdot\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{\sin\theta}{r}\right)^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

באותה צורה ניתן לקבל $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\theta} +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} =.$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)$$

סעיף ב! (3)

$x = r\cos\varphi \sin\theta$

$y = r\sin\varphi \cdot \sin\theta$

$z = r\cos\theta$

נתבונן בוקטור

$$\vec{S} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

$$\vec{S} = r\cos\varphi\sin\theta\cdot\vec{i} + r\sin\varphi\sin\theta\cdot\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\hat{r} = \frac{\partial S}{\partial r} = \cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot\vec{i} + \sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot\vec{j} + \cos\theta\cdot\vec{k} \quad (1)$$

נשים לב ש $n_r = |\hat{r}| = 1$

$$\underset{\sim}{\hat{\theta}} = \frac{\partial S}{\partial\theta} = r\cos\varphi\cos\theta\cdot\vec{i} + r\cos\theta\sin\varphi\vec{j} - r\sin\theta\cdot\vec{k}$$

$n_\theta = \|\underset{\sim}{\hat{\theta}}\| = r$ נרמל

$\underset{\sim}{\hat{\theta}} = n_\theta\cdot\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \cos\varphi\cos\theta\cdot\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\cdot\vec{k} \quad (2)$$

$$\underset{\sim}{\hat{\varphi}} = \frac{\partial S}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{i} + r\sin\theta\cdot\cos\varphi\cdot\vec{j} \quad (3)$$

$n_\varphi = \|\underset{\sim}{\hat{\varphi}}\| = r\sin\theta$ נרמל

$\underset{\sim}{\hat{\varphi}} = n_\varphi\cdot\hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\cdot\vec{i} + \cos\varphi\cdot\vec{j}$$

נשים לב ש- $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}$ מאונכים $\Leftarrow$

$\hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0$, $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$, $\hat{\theta}\cdot\hat{\varphi} = 0$.

נמצא נגזרות עבור $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$

$$\hat{r} = \cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot\bar{i} + \sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot\bar{j} + \cos\theta\cdot\bar{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot\bar{i} + \cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot\bar{j} - \sin\theta\,\bar{k}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\cdot\bar{i} + \cos\varphi\cdot\bar{j}$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial r} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot\vec{i} + \cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot\bar{j} = \sin\theta\cdot\hat{\varphi}$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot\bar{i} + \sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot\bar{j} - \sin\theta\cdot\bar{k} = \hat{\theta}$$

בצורה דומה ניתן לקבל כל הנגזרות

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial r} = \hat{0} \qquad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial r} = \hat{0} \qquad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r} = \hat{0}$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta} \qquad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = -\hat{r} \qquad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\theta} = \hat{0}$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\hat{\varphi} \qquad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\varphi} = \cos\theta\,\hat{\varphi} \qquad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi} = -\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}$$

אופרטור לפלס

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$$

כאשר

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\bar{k}$$

במערכת צירים כדוריות

$$\nabla = \frac{\hat{r}}{h_r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{h_\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\varphi}}{h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^2 = \nabla\Big(\underbrace{\frac{\hat{r}}{1}\cdot\frac{\partial}{\partial r}}_{(1*)} + \underbrace{\frac{\hat{\theta}}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}}_{(2*)} + \underbrace{\frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}}_{(3*)}\Big)$$

$$(1*) = \hat{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$= \hat{r}\cdot\hat{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \hat{r}\cdot\underbrace{\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}}_{=0}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{\theta}}_{=0}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}$$

$$+ \frac{\hat{r}}{r}\cdot\underbrace{\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial r}}_{=0}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \underbrace{\hat{r}\cdot\hat{\theta}}_{=0}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \underbrace{\hat{r}\cdot\hat{\varphi}}_{=0}\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}$$

$$+ \underbrace{\hat{r}\cdot\hat{\varphi}}_{=0}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\cdot\underbrace{\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r}}_{=0}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$(2*) = \frac{\hat{\theta}}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\nabla = \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$= \dots$

$(1*)+(2*)+(3*)$ מסכמים

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

10

$$f''_{xy}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(\Delta x,0)-f'_y(0,0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(\Delta x,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(\Delta x,0)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x\Delta y\,\dfrac{\Delta x^2-\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\Delta x\cdot\frac{\Delta x^2-\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$=\Delta x$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$$

$$f''_{yx}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\Delta y)-\overset{=0}{f'_x(0,0)}}{\Delta y}=$$

$$f'_x(0,\Delta y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,\Delta y)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\Delta y\cdot\dfrac{\Delta x^2-\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}-0}{\Delta x}=-\Delta y$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y-0}{\Delta y}=-1$$

ג

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

נשתמש בפיתוח עזור

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + O(t^4)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + O(t^4)$$

לכן

$$\frac{1}{1+xy} = 1 - xy + x^2y^2 - x^3y^3 + O(x^4, y^4)$$

$$(x+y)\cdot\frac{1}{1+xy} \approx (x+y)\cdot(1 - x\cdot y + x^2y^2 - x^3y^3)$$

$$= x + y - x^2y - xy^2 + \underbrace{x^3y^2 + x^2y^3 + \dots}_{\substack{\text{איברים מסדר} \\ \text{גבוה מסדר 3}}}$$

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \approx x + y - x^2y - xy^2 - \frac{(x+y-\cancel{x^2y}-\cancel{xy^2})^3}{3}$$

סדר גבוה

$$\approx x + y - x^2y - xy^2 - \frac{(x+y)^3}{3} \approx$$

$$\approx x + y - x^2y - xy^2 - \frac{(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)}{3}$$

$$\approx x + y - 2x^2y - 2xy^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3}$$

ב $P(x), Q(x)$ - פולינומים ממעלה k ב-n משתנים

נניח ש-
$$\lim_{|x|\to 0} \frac{P(x)-Q(x)}{|x|^k}=0$$

הוכיחו כי $P(x)=Q(x)$

3 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ - גזירה ברציפות פעמיים.

אם
$$\lim_{|x|\to 0}\frac{f(x)-P(x)}{|x|^2}=0$$
עבור $P(x)$ פולינום ממעלה 2.

הוכיחו כי $P(x)$ פולינום טיילור של $f(x)$.

<u>פתרון:</u>

ב $Q(x), P(x)$ - פולינומים ממעלה k.

נניח ש- $Q(x)\neq P(x)$

נסמן $0\le l\le k$ - מעלה הכי קטנה של המונומים שמופיעים בהפרש $Q(x)-P(x)$

נציג
$$P(x)-Q(x)=F(x)+G(x)$$

כאשר $F(x)$ - הוא סכום של מונומים מתוך $P(x)-Q(x)$ מעלה l ו- $G(x)$ הוא סכום של מונומים מתוך $P(x)-Q(x)$ ממעלה גדולה מ-l.

נבחר $0\neq b\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $F(b)\neq 0$

אז מתקיים
$$\|t\cdot b\|^l \ge \|t b\|^k$$
ל- $t\in\mathbb{R}$ מספיק קטן.

ומקבלים
$$0=\lim_{t\to 0^+}\frac{P(tb)-Q(tb)}{\|tb\|^l}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(tb)+G(tb)}{t^l\|b\|^l}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(tb)}{t^l\|b\|^l}=\frac{F(b)}{\|b\|^l}\neq 0$$

קיבלנו סתירה

(3)

נסמן $T_2(x)$ - פולינום טיילור של $f(x)$ מדרגה 2. סביב הנק' $a\in\mathbb{R}^n$

$$\left|\frac{P(h)-T_2(h)}{\|h\|^2}\right| = \left|\frac{f(a+h)-P(h)+T_2(h)-f(a+h)}{\|h\|^2}\right|$$

לפי הנתון   כי T_2 פולינום טיילור

$$\le \frac{|f(a+h)-P(h)|}{\|h\|^2} + \frac{\|f(a+h)-T_2(h)\|}{\|h\|^2} \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

לכן מסעיף הקודם
$P(h)=T_2(h)$

תרגיל: מצאו וסווגו את נק' הקיצון (6)

$$f(x,y,z)=xy+yz+x\cdot z$$

$$\begin{cases} f'_x = y+z=0 \to z=-y \\ f'_y = x+z=0 \to z=-x \to y=x \\ f'_z = y+x=0 \to y=-x \end{cases}$$

לכן נק' חשודה לקיצון $(0,0,0)$

$$f''_{xx}=0 \qquad f''_{yy}=0 \qquad f''_{zz}=0$$

$$f''_{xy}=f''_{yx}=1 \qquad f''_{xz}=f''_{zx}=1$$

$$f''_{yz}=f''_{zy}=1$$

$$\Delta(0,0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נחשב ע"ע

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$$

$$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-1 \qquad \lambda_3=+2$$

ע"ע עם סימנים הפוכים לכן
הנק' $(0,0,0)$ הוא לא נק' קיצון