חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 7.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. (א) הוכיחו: $(\underline{x}_0,\underline{y}_0)\in\mathbb{R}^{n_x}_{\underline{x}}\times\mathbb{R}^{n_y}_{\underline{y}}$ היא נקודת min של $f_1(\underline{x})+f_2(\underline{y})$ אמ"מ $\underline{x}_0$ נקודת min של f_1 ו $\underline{y}_0$ נקודת min של f_2. נסחו והוכיחו טענה דומה עבור נקודת אוכף.

(ב) במקרים הבאים מצאו ומיינו את כל הנקודות הקריטיות. (בנקודות קריטיות מנוונות ניתן להיעזר במסלולים)

i. $f(x,y)=y^2-sin^3(x)$ ii. $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-4xyz$.

(ג) מיינו את הנקודה הקריטית בראשית: i. $f(x,y)=\frac{xy}{1+sin(x)e^{cos(y)}}$ ii. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

(ד) בהינתן נקודות שונות $(x_1,y_1),\dots,(x_N,y_N)\in\mathbb{R}^2$ נגדיר $\sigma(a,b):=\sum(y_i-ax_i-b)^2$. הוכיחו כי σ מקבלת מינימום מוחלט ב $\mathbb{R}^2$, ונקודת המינימום מקיימת $\begin{bmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_i\\ \sum x_i & N\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum x_iy_i\\ \sum y_i\end{bmatrix}$. (wiki: Least squares)

2. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם ל $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ יש נקודה קריטית יחידה, והיא מינימום מקומי, אז f חסומה מלרע. (רמז: $f(x,y)=x^2+y^2(1-x)^3$)

(ב) אם ל $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ יש אינסוף נקודות מקסימום מקומי אז יש לפחות מינימום מקומי אחד.
(רמז: $f(x,y)=(1+e^y)cos(x)-ye^y$.)

(ג) יהי $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ פולינום. נניח שעבור כל ישר L דרך $(0,0)$ לצמצום $f|_L$ יש min ב 0. אז ל f יש min ב $(0,0)$.
(רמז: $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$. שרטטו קווי גובה בסביבת $(0,0)$, בגבהים שליליים וחיוביים.)

3. (א) תהי $\mathbb{R}^2\supseteq\mathscr{D}_f\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ מקיימת משוואת Laplace , $\partial^2_{xx}f+\partial^2_{yy}f=0$. נניח ש $\partial^2_{xx}f$ לא מתאפסת באף נקודה.
הוכיחו: ל f אין אף min/max מקומי.

(ב) תהי $\mathbb{R}^n\supseteq\mathscr{D}_f\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות. נניח שמתקיים: $grad_{\underline{x}}(f)|_{\underline{x}_0}=0$ והמטריצה $\{\partial^2_{x_ix_j}f|_{\underline{x}_0}\}$ מוגדרת חיובית. תהי $\underline{y}\leftrightarrows\underline{x}$ החלפת משתנים (גזירה פעמיים ברציפות). הוכיחו: $grad_{\underline{y}}(f)|_{\underline{y}_0}=0$ והמטריצה $\{\partial^2_{y_iy_j}f|_{\underline{y}_0}\}$ מוגדרת חיובית. (לכן את חיפוש/מיון נקודות קריטיות ניתן לעשות בקואורדינטות הנוחות)

(ג) מצאו ומיינו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x,y)=ln(arctan\frac{y}{x})\cdot sin(\sqrt{x^2+y^2})$.

(ד) נקבע נקודות $\underline{x}^{(1)},\underline{x}^{(2)},\underline{x}^{(3)}$ ב $\mathbb{R}^2$. נגדיר סכום המרחקים עד לנקודה, $f(\underline{x})=\sum_{i=1}^{3}||\underline{x}-\underline{x}^{(i)}||$. נניח שהמינימום המוחלט של f מתקבל בנקודה $\underline{x}_0$ (הוכיחו כי קיימת), כך ש: $\{\underline{x}_0\neq\underline{x}^{(i)}\}$. הוכיחו: כל הזויות בין הישרים $\{\overline{\underline{x}_0,\underline{x}^{(i)}}\}$ שוות ל $120°$.

(ה) (הכללה של משפט Rolle) תהי $\mathbb{R}^n\supset\overline{Ball_r(0)}\xrightarrow{f}\mathbb{R}^1$ פונקציה רציפה, דיפרנציאבילית ב $Ball_r(0)$, וקבועה ב $\partial Ball_r(0)$. הוכיחו: קיימת נקודה $\underline{x}_0\in Ball_r(0)$ שבה $grad(f)|_{\underline{x}_0}=0$.

4. תהי $\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית. נקבע נקודה $(\underline{x},x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$, כך ש $f(\underline{x})\neq x_{n+1}$. הוכיחו:

(א) קיימת נקודה $\tilde{\underline{x}}\in\mathbb{R}^n$ שעבורה $dist\big((\underline{x},x_{n+1}),\Gamma_f\big)=dist\big((\underline{x},x_{n+1}),(\tilde{\underline{x}},f(\tilde{\underline{x}}))\big)$. (ראו תרגיל בית 3, שאלה 5)

(ב) הישר $\overline{(\underline{x},x_{n+1}),(\tilde{\underline{x}},f(\tilde{\underline{x}}))}$ מאונך למישור המשיק לגרף Γ_f בנקודה $(\tilde{\underline{x}},f(\tilde{\underline{x}}))$.