חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 8.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. (א) מצאו/מיינו את כל הנקודות הקריטיות של פונקציה $y(x)$ המוגדרת ע"י $ln\sqrt{x^2+y^2}=arctan\frac{y}{x}$. (בנקודות בהן היא מוגדרת)

(ב) מצאו ומיינו את כל הנקודות הקריטיות של פונקציה $z(x,y)$ המוגדרת ע"י $e^z+zy+xy=1$, $z(0,0)=0$.

(ג) נניח שמשוואה $\vec{x}\times\vec{v}=\vec{u}$ מתקיימת עבור $(\vec{x}_0,\vec{v}_0,\vec{u}_0)$. האם זה מגדיר פתרון יחיד $\vec{x}(\vec{v},\vec{u})$ בסביבה של $(\vec{x}_0,\vec{v}_0,\vec{u}_0)$?

(ד) נגדיר $x(t)=ln(t)+sin(t)$, $y(t)=arctan(t)-e^t$. חשבו $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}$.

(ה) תהי $f(t)$ פונקציה גזירה. נניח שפונקציה $z(x,y)$ מקיימת את המשוואות: $ln(z)+x\cdot cos(t)+y\cdot sin(t)=f(t)$, $-x\cdot sin(t)+y\cdot cos(t)=f'(t)$. נניח ש $x\cdot cos(t)+y\cdot sin(t)\neq -f''(t)$. הוכיחו: $(\partial_x z)^2+(\partial_y z)^2=z^2$.

(ו) נניח שמשוואה $f(x,y,z)=0$ מגדירה את פונקציות C^1: $x(y,z),y(x,z),z(x,y)$. הוכיחו/הפריכו: $\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial z}=1$.

(ז) תהי $\mathbb{R}^n\supseteq\mathscr{D}_f\xrightarrow{f}\mathbb{R}^n$ פונקצית C^1. נניח שלמשוואה $f(\underline{x})=\underline{y}_0$ יש בדיוק k פתרונות, $\underline{x}^{(1)},...,\underline{x}^{(k)}$, ומתקיים: $\{det[D_f|_{\underline{x}^{(i)}}]\neq 0\}_i$. הוכיחו: קיים $\delta>0$ כך שעבור כל $\underline{y}\in Ball_\delta(\underline{y}_0)$ למשוואה $f(\underline{x})=\underline{y}$ יש בדיוק k פתרונות.

2. (א) מצאו את המישור המשיק לספירה הסטנדרטית $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$.

(ב) מצאו/תארו את כל הנקודות בהן העקום $\{y^2=\prod_{i=1}^{d}(x-\alpha_i)^2\}\subset\mathbb{R}^2$ חלק. איך העקום "נראה" בכל נקודה לא חלקה?

(ג) תהי $\mathbb{R}^2\supseteq\mathscr{D}_f\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ פונקצית C^1. הוכיחו: $grad(f)$ מאונך לכל קו רמה בכל נקודות החלקות שלו.

3. (א) הסיקו ממשפט על פונקציה סתומה את המשפט על הפונקציה הפוכה:
תהי $\mathbb{R}^n\supseteq\mathscr{D}_f\xrightarrow{f}\mathbb{R}^n$ פונקציה C^k, עבור $1\leq k\leq\infty$. נניח שמטריצה $D_f|_{\underline{x}_0}$ הפיכה. אז קיימת סביבה (פתוחה) $f(\underline{x}_0)\in\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ופונקציה הפוכה $\mathcal{U}\xrightarrow{f^{-1}}\mathscr{D}_f$, המקיימת: $f\circ f^{-1}=Id_{\mathcal{U}}$, $f^{-1}\circ f=Id_{\mathscr{D}_f}$, $D_{f^{-1}}=(D_f)^{-1}$.

(ב) הסיקו כי פונקציות $\mathbb{R}\xrightarrow{exp}\mathbb{R}_{>0}$, $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\xrightarrow{tan}\mathbb{R}$, $(0,\pi)\xrightarrow{cos}(-1,1)$, $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\xrightarrow{sin}(-1,1)$, הפיכות.

(ג) האם $f(x,y)=\Big(sin(x+tan(y))+tan(y-sin(x)),arcsin(y+arctan(x))+arctan(x-arcsin(y))\Big)$ פונקציה הפיכה ליד הנקודה $(0,0)$? אם כן, רשמו את פיתוח טיילור של f^{-1} עד סדר 2.

(ד) האם דוגמאות הבאות סותרות את משפט על הפונקציה ההפוכה?

i. פונקציה $\mathbb{R}^2\ni(x,y)\to(u,v)=(x^3-y,3x^3+2y)\in\mathbb{R}^2$ הפיכה גלובלית, למרות ש $det[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}]=0$ על ציר $\hat{y}$.

ii. פונקציה $\mathbb{R}^2\ni(x,y)\to(u,v)=(e^x cos(y),e^x sin(y))\in\mathbb{R}^2$ לא חח"ע, אך $det[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}]\neq 0$ בכל נקודה של $\mathbb{R}^2$.

(ה) החלפת משתנים C^k זאת פונקציה הפיכה $\mathbb{R}^n_{\underline{x}}\supseteq\mathcal{U}_{\underline{x}}\ni\underline{x}\rightleftarrows\underline{y}\in\mathcal{U}_{\underline{y}}\subseteq\mathbb{R}^n_{\underline{y}}$, כך ש $\underline{x}(\underline{y})$, $\underline{y}(\underline{x})$ הן פונקציות C^k. במקרה כזה מסמנים את $D_{\underline{y}(\underline{x})}$ ע"י $\frac{\partial(y_1...y_n)}{\partial(x_1...x_n)}$ וקוראים לה מטריצת יעקובי. בדקו שמעבר לקוטביות ב $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ הינו החלפת משתנים C^∞ (בנקודות שהוא מוגדר) וחשבו את הדטרמיננט של מטריצות יעקובי.

4. הסיקו ממשפט על פונקציה הפוכה את המשפט על העתקה פתוחה: תהי $\mathbb{R}^n\supseteq\mathscr{D}_f\xrightarrow{f}\mathbb{R}^n$ פונקציה C^1 ונניח כי מטריצה D_f לא מנוונת על קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subset\mathscr{D}_f$. אז הקבוצה $f(\mathcal{U})\subset\mathbb{R}^n$ הינה פתוחה.