1. א. נסמן:

$$F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}\ .$$

נניח כי $F(x_0,y_0)=0$.

ע"פ משפט הפונקציה הסתומה מתקיים:

$$y'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\frac{x}{r^3}+\frac{y}{r^2}}{\frac{y}{r^3}-\frac{x}{r^2}}=\frac{x+y}{y-x}\ .$$

אנו רואים כי

$$y'(x)=0$$

אמ"מ

$$x=-y\ .$$

נציב את $x=-y$ במשוואה המקורית ונקבל

$$x_1=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},x_2=-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\ .$$

נגזור שנית:

$$y''(x)=\frac{\left(1+y'(x)\right)(y-x)+\left(1-y'(x)\right)(x+y)}{(x-y)^2}\ ,$$

לכן בנקודות קיצון $x=x_1,x_2$ מתקיים:

$$y''(x_1)>0,y''(x_2)<0\ ,$$

מכאן x_1 הינה נקודת מינימום ו- x_2 הינה נקודת מקסימום.

ב. נסמן

$$F(x,y,z)=e^z+zy+xy-1\ .$$

נשים לב כי F הינה פונקציית $C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, $F\left(0,0,0\right)=0$ ו-

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)}=\left.\left(e^z+y\right)\right|_{(0,0,0)}=1\neq 0,$$

לכן המשוואה

$$F\left(x,y,z\right)=0$$

מגדירה את z כפונקציה של x ו- y בסביבה קטנה דיה של $\left(0,0,0\right)$. ע"פ משפט הפונקציה הסתומה מתקיים:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{y}{e^z+y}$$

ו-

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{x}{e^z+y}.$$

מכאן

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial\left(\frac{y}{e^z+y}\right)}{\partial x}=\frac{ye^z\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(e^z+y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial\left(\frac{x}{e^z+y}\right)}{\partial y}=\frac{x\left(e^z\frac{\partial z}{\partial y}+1\right)}{\left(e^z+y\right)^2}$$

ו-

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial\left(\frac{y}{e^z+y}\right)}{\partial y}=-\frac{e^z+y-y\left(e^z\frac{\partial z}{\partial y}+1\right)}{\left(e^z+y\right)^2}.$$

לאחר ההצבה של $\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$ נקבל מטריצת ההסיאן:

$$. H_z(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

למטריצת ההסיאן ישנם שני ערכים עצמיים מנוגדי סימן: $\lambda_1=1$ ו- $\lambda_2=-1$, לכן $(0,0)$ הינה נקודת אוכף.

ג. נסמן:

$$, F(x_1,x_2,x_3,u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3)=(x_1,x_2,x_3)\times(v_1,v_2,v_3)-(u_1,u_2,u_3)$$

דהיינו

$$. F(x_1,x_2,x_3,u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3)=\left(\underbrace{x_2v_3-x_3v_2-u_1}_{=f_1},\underbrace{x_3v_1-x_1v_3-u_2}_{=f_2},\underbrace{x_1v_2-x_2v_1-u_3}_{=f_3}\right)$$

בבירור $F\in C^\infty\left(\mathbb{R}^9\right)$. נחשב

$$. \det\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=\begin{vmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

לא ניתן להשתמש כאן במשפט הפונקציה הסתומה.

ניגש אל הבעיה בצורה אחרת: נשים לב כי

$$. F(0,0,0,0,0,0,1,2,3)=(0,0,0)$$

בנוסף

$$F(t,2t,3t,0,0,0,1,2,3)=(0,0,0)$$

לכל $t\in\mathbb{R}$, כלומר בכל סביבה של $\mathbf{x}_0=(0,0,0)$ קיימת נקודה $\mathbf{x}$ המקיימת

$$F(\mathbf{x},\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0)=(0,0,0)$$

כאשר

$$. \mathbf{u}_0=(0,0,0), \mathbf{v}_0=(1,2,3)$$

מכאן המשוואה הנתונה לא מגדירה את (x_1,x_2,x_3) כפונקציה של $(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3)$.

ד. נסמן:

$$. f(x,t)=x-\ln t-\sin t$$

נשים לב כי $f(x,t)$ הינה $C^2(U)$ כאשר $U=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : t>0\}$, $f(\sin1,1)=0$ ו-

$$, \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(\sin1,1)}=-\left.\frac{1+t\cos t}{t}\right|_{(\sin1,1)}=-1-\cos1\neq0$$

לכן ממשפט הפונקציה הסתומה נסיק כי המשוואה $f(x,t)=0$ מגדירה את t כפונקציה של x בסביבה קטנה דיה של הנקודה $(\sin1,1)$. יתר על כן:

$$. t'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}}=\frac{t}{1+t\cos t}$$

מכאן

$$. t'(\sin1)=\frac{1}{1+\cos1}$$

בנוסף:

$$, \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{1}{1+t^2}-e^t\right)\frac{t}{1+t\cos t}$$

לכן

$$. \frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{2tt'}{\left(1+t^2\right)^2}-e^tt'\right)\frac{t}{1+t\cos t}+\left(\frac{1}{1+t^2}-e^t\right)\frac{t'(1+t\cos t)-t(t'\cos t-tt'\sin t)}{(1+t\cos t)^2}$$

מכאן

$$. \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\frac{\sin1-\cos1-4e-2e\cos1-2e\sin1}{2(1+\cos1)^3}$$

ה. נסמן

$$. G(x,y,z,t)=-x\sin t+y\cos t-f'(t) \ , F(x,y,z,t)=\ln z+x\cos t+y\sin t-f(t)$$

מתקיים: $F(x,y,u,v)$ ו- $G(x,y,u,v)$ פונקציות- C^1 ו-

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{z} & -x\sin t + y\cos t - f'(t) \\ 0 & -x\cos t - y\sin t - f''(t) \end{pmatrix} = \frac{-x\cos t - y\sin t - f''(t)}{z} \neq 0,$$

לכן ממשפט הפונקציה הסתומה המערכת הנתונה מגדירה שתי פונקציות סתומות $z(x,y)$

ו- $t(x,y)$. נחשב את הנגזרות החלקיות.

נגזור את משוואה הראשונה לפי x ונקבל:

$$0 = \frac{z'_x}{z} + \cos t - xt'_x \sin t + yt'_x \sin t - t'_x f'(t) = \frac{z'_x}{z} + \cos t + \underbrace{\left[-x\sin t + y\cos t - f'(t)\right] t'_x}_{\text{differentiating } G=0 \text{ by } x} = \frac{z'_x}{z} + \cos t.$$

עתה נגזור את המשוואה השניה לפי y ונקבל:

$$0 = \frac{z'_y}{z} - xt'_y \cos t + \sin t + yt'_y \cos t - t'_y f'(t) = \frac{z'_y}{z} + \sin t + \underbrace{\left[-x\sin t + y\cos t - f'(t)\right] t'_x}_{\text{differentiating } G=0 \text{ by } x} = \frac{z'_y}{z} + \sin t.$$

קיבלנו כי

$$\begin{cases} \frac{z'_x}{z} = -\cos t \\ \frac{z'_y}{z} = -\sin t \end{cases}.$$

נעלה בריבוע, נסכום ונקבל את מה שנדרש.

ו. ע"פ משפט הפונקציה הסתומה מתקיים:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}, \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

מכאן

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

ז. לפי משפט הפונקציה ההופכית, קיימות סביבות $U_{x_1},U_{x_2},\ldots,U_{x_k}$ של $x_1,x_2,\ldots,x_k$ (בהתאמה), $\tilde{V}_1,\tilde{V}_2,\ldots,\tilde{V}_k$ של y_0 ופונקציות- C^1

$$g_i:\tilde{V}_i\to U_{x_i}$$

כאשר $1\le i\le k$ כך ש-

$$f\circ g_i=1_{\tilde{V}_i},\quad g_i\circ f=1_{U_{x_i}}.$$

יהא $\varepsilon>0$ מספיק קטן כך ש- $B_\varepsilon(x_i)\subseteq U_{x_i}$ ו- $B_\varepsilon(x_i)\cap B_\varepsilon(x_j)=\varnothing$ לכל $1\le i\ne j\le k$.

נסמן:

$$f(B_\varepsilon(x_i))=V_i,$$

$$V_0=\bigcap_{i=1}^{k}V_i$$

ו-

$$g_i|_{V_0}=h_i.$$

אזי V_0 הינה קבוצה פתוחה ו-

$$f\circ h_i=1_{V_0},\quad h_i\circ f=1_{B_\varepsilon(x_i)}.$$

נשים לב כי לכל $y\in V_0$ למשוואה $f(x)=y$ קיימים בדיוק k פתרונות והם נתוהים ע"י

$$x_i'=h_i(y),\quad 1\le i\le k.$$

2. א. נקבע נקודה $p(x_0,y_0)$ ב- S^1, אז משוואת המשיק ל- S^1 ב- p נתונה ע"י

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=0.$$

עתה נקבע נקודה $p(x_0,y_0,z_0)$ ב- S^2, אז משוואת המישור המשיק ל- S^2 ב- p נתונה ע"י

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

מכאן ניתן להכליל כי משוואת המרחב המשיק ל- S^{n-1} בנקודה $p\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$ היא

$$2x_1^{(0)}\left(x_1-x_1^{(0)}\right)+2x_2^{(0)}\left(x_2-x_2^{(0)}\right)+\cdots+2x_n^{(0)}\left(x_n-x_n^{(0)}\right)=0 .$$

ב. נסמן

$$F(x,y)=y^2-\prod_{j=1}^{d}\left(x-\alpha_j\right)^2 ,$$

$$G(x,y)=y-\prod_{j=1}^{d}\left(x-\alpha_j\right)$$

ו-

$$H(x,y)=y+\prod_{j=1}^{d}\left(x-\alpha_j\right) .$$

נשים לב כי

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : F(x,y)=0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : G(x,y)=0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : H(x,y)=0\right\} .$$

העקומים $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : G(x,y)=0\right\}$ ו- $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : H(x,y)=0\right\}$ הינם עקומים חלקים. יתר על כן

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : G(x,y)=0\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : H(x,y)=0\right\}=\left\{\left(\alpha_j,0\right):1\le j\le d\right\} .$$

לכן נקודות אי-החלקות של העקום המקורי הן $(\alpha_1,0),(\alpha_2,0),\ldots,(\alpha_d,0)$. בסביבה מספיק קטנה של כל נקודה כזאת העקום "נראה כמו" אות X .

ג. יהיו $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ו- $C\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$f(x_0,y_0)=C$$

ו- (x_0,y_0) היא נקודת חלקות של העקום $f(x_0,y_0)=C$. נגדיר פונקציה

$$F(x,y)=f(x,y)-C .$$

נשים לב כי $F(x_0,y_0)=0$, מהתנאי ש- (x_0,y_0) היא נקודת חלקות נסיק כי או $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ או $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. בה"כ נניח כי $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, לכן ממשפט הפונקציה הסתומה נסיק כי בסביבת

הנקודה $\left(x_0, y_0\right)$ המשוואה $F\left(x, y\right)=0$ מגדירה את y כפונקציה גזירה של x. נגזור את המשוואה $F\left(x, y\right)=0$ לפי המשתנה x:

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y} y'=\nabla F \cdot\left(1, y'\right),$$

לאחר ההצבה של $\left(x, y\right)=\left(x_0, y_0\right)$ נקבל:

$$\nabla F\left(x_0, y_0\right) \cdot\left(1, y'\left(x_0\right)\right)=0.$$

לא קשה להשתכנע כי הווקטור $\left(1, y'\left(x_0\right)\right)$ הינו וקטור הכיוון של קו המשיק לגרף של $y\left(x\right)$ בנקודה $x=x_0$.

3. א. נסמן:

$$\mathbf{x}=\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad \mathbf{y}=\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right).$$

נניח כי $f\left(\mathbf{x}_0\right)=\mathbf{y}_0$.

נגדיר פונקציה

$$g: \mathfrak{D}_f \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ע"י

$$g\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}\right)=f\left(\mathbf{x}\right)-\mathbf{y}.$$

מתקיים:

א. g הינה פונקציית-C^k;

ב. $g\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0\right)=\mathbf{0}$;

ג.

$$D_g\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & -1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & 0 & 0 & \cdots & -1\end{bmatrix}$$

ו-

ד. $\operatorname{rank} D_g\left(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0\right)=n$ (בין היתר ב"חלק" של $\mathbf{x}$).

לכן, ממשפט הפונקציה הסתומה נסיק כי קיימות סביבות פתוחות U של $\mathbf{x}_0$, V של $\mathbf{y}_0$ ופונקציית- C^k

$$h:V\to U$$

כך שלכל $\mathbf{x}\in U$ ו- $\mathbf{y}\in V$:

$$g\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=0$$

אמ"מ

$$g\left(h\left(\mathbf{y}\right),\mathbf{y}\right)=0,$$

כלומר

$$x=h\left(\mathbf{y}\right).$$

מכאן נסיק כי

$$h=f^{-1}.$$

מכלל שרשרת מתקיים:

$$I=D_{\mathrm{Id}}=D_f D_{f^{-1}},$$

כלומר

$$D_{f^{-1}}=D_f^{-1}.$$

ג. נרשום את פולינום טיילור מסדר שני ל- $f\left(x,y\right)$:

$$P_{f,1}(x,y)=(2y,2x),$$

מכאן אנו רואים כי

$$\det D_f(0,0)\neq 0,$$

לכן f הפיכה מקומית. נשים לב כי הנגזרות עד הסדר השני של f^{-1} נקבעות לפי הנגזרות עד סדר שני של f. לכן מספיק לחשב את פולינום טיילור מסדר השני ל- f. לא קשה להשתכנע כי הפולינום הוא

$$P_{f,2}(x,y)=(2y,2x),$$

מכאן נסיק כי פולינום טיילור הדרוש הוא:

$$P_{f^{-1},2}(x,y)=(y/2,x/2).$$

ד. i. אין כאן סתירה מאחר אי-התאפסות הדטרמיננטה מהווה תנאי מספיק ולא הכרחי.

ii. אין כאן סתירה מאחר ומסקנת המשפט היא מקומית ולא גלובלית.

ה. חישבנו כבר את היעקוביאן של המעבר לקוטביות בדף מס' 5.

4. תהא $x_0\in U$. מכיוון ש- $\det D_f(x_0)\neq 0$, קיימות קבוצות פתוחות U_{x_0} של x_0 ו- V_{x_0} של $f(x_0)$ ופונקציית- C^1 $g:V_{x_0}\to U_{x_0}$ כך ש-

$$g\circ f=1_{U_{x_0}},\quad f\circ g=1_{V_{x_0}}.$$

אנו רואים כי

$$f(U)=\{f(x):x\in U\}=\bigcup_{x\in U}V_x,$$

מכאן ש- $f(U)$ פתוחה.