חדו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2019. תרגיל בית מס' 9.

(מרצים: ד. גולקו, י. שטראוס, ד. קרנר)

1. (א) במקרים הבאים מצאו את ה min/max המקומיים והמוחלטים. כל פעם הסבירו למה ה min/max המוחלט קיים.

   i. $f(x,y)=x^py^q$, $\mathscr{D}=\{(x,y)|\ |x|^a+|y|^a\le 1\}$, $a>0$, $p,q\in\mathbb{N}$.

   ii. $f(x,y)=\Big(x^2+2(x-y)^2+3(x+y)^2\Big)^4\Big(x^2+y^2\Big)^3$, $\mathscr{D}=\{(x,y)|\ x^2+y^2=1\}$.

   iii. $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$, $\mathscr{D}_f=\{(x,y,z)|\ |z|\le 1,\ x^2+y^2\le 1\}$.

   iv. $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2-z^3$, $\mathscr{D}=\{(x,y,z)|\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

   v. $f(x,y)=\frac{x^2+6xy+3y^2}{x^2-xy+y^2}$, $\mathscr{D}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   (ב) הוכיחו את אי-שיוויון הממוצעים (חשבוני/הנדסי/הרמוני): $\frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}\le\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\le\frac{\sum x_i}{n}$, עבור $\{x_i>0\}_i$. מתי מתקיים השיוויון? (הדרכה: מצאו את $max(\prod x_i)$ תחת האילוץ $\sum x_i=c$. עבור הצד השני הציבו $y_i=\frac{1}{x_i}$.)

   (ג) באותה דרך קבלו את האי-שיוויון בין $\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta_i}$ ל $\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$, כאן $\{x_i>0\}$, $\{\alpha_i>0\}$, $\{\beta_i>0\}$,

2. (בכל סעיף הסבירו למה ה min/max המוחלטים קיימים?)

   (א) מצאו את המרחק (הקטן ביותר) בין העקומות: $\{y=x^2+c,\ z=0\}$, $\{z=ax,\ y=0\}$ ב $\mathbb{R}^3$.

   (ב) מצאו את המרחק הקטן/הגדול ביותר בין נקודה $0\in\mathbb{R}^n$ לקבוצה $\{\sum_{i=1}^n|x_i|^a=1\}\subset\mathbb{R}^n$, $a>0$.

   (ג) מצאו את נקודות הקבוצה $\{\prod_{i=1}^n|x_i|^{a_i}=1\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{a_i>0\}_i$ הקרובות ביותר ל $0\in\mathbb{R}^n$.

   (ד) מצאו את השטח המינימלי של אליפסה $\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}\subset\mathbb{R}^2$ אשר מכילה את (1,3) כנקודת שפה. האם קיימת אליפסה כנ"ל בעלת שטח מקסימלי?

   (ה) בין כל התיבות החסומות ב $\{x^2+2y^2+3z^2=1\}\subset\mathbb{R}^3$ ובעלות פאות מקבילות למישורי קואורדינטות מצאו את התיבה בעלת נפח מרבי.

3. נקבע מטריצה סימטרית $A=A^t\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. נגדיר פונקציה $f(\underline{x})=\underline{x}\cdot A\cdot\underline{x}^t$.

   (א) הראו כי f מקבלת את מין/מקס המוחלטים על $S^{n-1}=\{\underline{x}|\ |\underline{x}|=1\}\subset\mathbb{R}^n$

   (ב) הראו כי בכל נקודת הקיצון מתקיים: $A\cdot\underline{x}^t\sim\underline{x}^t$ (תלות לינארית של וקטורים). הסיקו: ל A יש לפחות וקטור עצמי (ממשי) אחד. נסמנו $\vec{v}_1$.

   (ג) בדקו כי נקודת קיצון של $f(\underline{x})$ תחת אילוצים $|\underline{x}|=1$, $\underline{x}\cdot\vec{v}_1=0$ נותנת וקטור עצמי נוסף, נסמנו $\vec{v}_2$.

   (ד) המשיכו את התהליך, וקבלו: קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ המורכב מוקטורים עצמיים של A.
   (כלומר A ניתנת ללכסון אורתוגונלי.)

4. (א) הוכיחו (מהגדרה של $vol_n(X)$) כי: $vol_n\prod_{i=1}^n(a_i,b_i)=vol_n\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$.

   (ב) האם הקבוצות הבאות בעלות אורך? אם כן, חשבו אותו. i. $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ ii. $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^1$.

   (ג) תהיינה $S_1\subset\mathbb{R}^n$, $S_2\subset\mathbb{R}^m$, כך ש $vol_n(S_1)=0$ ו S_2 חסומה. האם בהכרח $vol_{n+m}(S_1\times S_2)=0$?

   (ד) האם הקבוצה $\cup_n\{(x,y)|\ \frac{1}{2^{2n+1}}<max\big(|x|,|y|\big)<\frac{1}{2^{2n}}\}\subset\mathbb{R}^2$ בעלת שטח? אם כן, חשבו אותו.