1 i

מצאו את קיצון עבור

$$f(x,y)=x^p y^q$$

בתחום

$$\{|x|^\alpha+|y|^\alpha \le 1\}$$

$\alpha>0$

$p,q\in\mathbb{N}$

פתרון:

א) את חשודות בתוך התחום

$$f'_x=p\cdot x^{p-1}\cdot y^q=0$$
$$f'_y=q\cdot y^{q-1}\cdot x^p=0 \Rightarrow x=0,\ y=0$$

ב) את חשודות על השפה

את חשודות עבור $v=\ln u$ ו- u שווי
לכן נחפש אקסטרמום עבור פונק'

$$g(x,y)=\ln(x^p y^q)=p\ln x+q\ln y$$

בגלל הסימטריה של התחום וגם של f
נעשה בדיקה עבור $x>0,\ y>0$

$$F(x,y,\lambda)=p\cdot\ln x+q\cdot\ln y+\lambda\cdot(x^\alpha+y^\alpha-1)$$

$$\begin{cases} F'_x=\frac{p}{x}+\lambda\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}=0 \rightarrow x^\alpha=-\frac{p}{\lambda\alpha} \\ F'_y=\frac{q}{y}+\lambda\cdot\alpha\cdot y^{\alpha-1}=0 \rightarrow y^\alpha=-\frac{q}{\lambda\alpha} \\ F'_\lambda=x^\alpha+y^\alpha=1 \rightarrow -\frac{p}{\lambda\alpha}-\frac{q}{\lambda\alpha}=1 \end{cases}$$

$$\lambda=-\frac{(p+q)}{\alpha} \rightarrow x^\alpha=\frac{p}{p+q} \quad y^\alpha=\frac{q}{p+q}$$

נק' חשודות

נבדוק ערך של הפונק' בנק' חשודות

$f(x,0)=0$, $x\in[-1,1]$ עבור

$f(0,y)=0$, $y\in[-1,1]$ עבור

נק' מינימום בתחום

נק' חיתוך של האילוצים

$f(\pm 1,0)=f(0,\pm 1)=0$

נק' $_{max}$ בתחום $\rightarrow$

$$f\left(\left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)=\left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{\alpha}}\cdot\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{q}{\alpha}}$$

ii ①

א) מצא את קיצון עבור הפונק

$$f(x,y) = \left(x^2 + 2(x-y)^2 + 3\cdot(x+y)^2\right)^4 \cdot (x^2+y^2)^3$$

על העיגול $x^2+y^2=1$

פתרון: נשתמש בשיטת הצבה

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

$$f(x,\sqrt{1-x^2}) = \left(x^2+5+2x\cdot(\pm\sqrt{1-x^2})\right)^4$$

נחפש את קיצון עבור הפונק

$$g(x) = x^2+5+2x\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$g' = 2x + 2\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{x\cdot(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$2x\cdot\sqrt{1-x^2} = 4x^2-2 \qquad (*)$$

$$4x^2\cdot(1-x^2) = 16x^4-16x^2+4$$

$$5x^4-5x^2+1=0$$

נסמן $x^2=t$

$$5t^2-5t+1=0$$

$$x^2 = t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

רק "+" מתאים עבור המשוואה (*)

לכן

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}}$$

לא מתאים עבור (*)

נגזרת בפונק'

$$h(x) = x^2 + 5 - 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$h'(x) = 2x - 2 \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{x \cdot (-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$2x \cdot \sqrt{1-x^2} = 2 - 4x^2 \quad (**)$$

בדומה לסעיף ג' עבור $g(x)$

$$x^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$$

לא מקיים $(**)$ $\rightarrow$ $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}$

לכן יש חשודות:

$$M_{1,2}\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}\right)$$

$$M_{3,4}\left(-\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}}\right)$$

נציב את הנק' בפונק' $f(x,y)$

$f(M_1) \approx 1918.29 \rightarrow$ max נק'

$f(M_2) \approx 543.86$

$f(M_3) \approx 368.7 \rightarrow$ min נק'

$f(M_4) = 1450.01$

לכן לפי משפט
ווירשטרס פונק'
רציפה בתחום
קומפקטי מקבלת
ערך מקסימלי
ומינימלי

$\Leftarrow$ M_1 - נק' max

M_3 - נק' min

פינות
$$\begin{cases} f(1,0) = 1296 \\ f(-1,0) = 1296 \end{cases}$$

ב) הוכיחו את אי שוויון הממוצעים.

$$x_i > 0 \qquad \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

פתרון: נחפש את קיצון עבור הפונק'

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

תחת האילוץ $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$

נשים לב שנק' קיצון עבור פונק' $h(x)$ ו- $\ln(h(x))$
שוות כי $\ln x$ פונק' מונוטונית ולכן נחפש את
השוואה עבור פונק'

$$g(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \ln(f(x_1, \dots, x_n))$$

נגדיר פונק' לגרנג'

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - c\right)$$

$$F'_{x_i} = \frac{1}{x_i} + \lambda = 0 \rightarrow x_i = -\frac{1}{\lambda}$$

$$F'_{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i - c = 0 \rightarrow -\frac{1}{\lambda} \cdot n = c \rightarrow \lambda = -\frac{n}{c}$$

לכן

$$\forall i, \quad x_i = \frac{c}{n}$$

נסמן קבוצת הנקודות על האילוץ

$$A : \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i = c \right\}$$

נבחר נק' שמקיימת את האילוץ, למשל $(c,0,\dots,0)$

ונסמן $R = \|(c,0,\dots,0)\| = c$

נסמן $\overline{B_R}(\bar{0})$ - כדור עם רדיוס R סביב ראשית

אז $A \cap \overline{B_R}(\bar{0})$ - קבוצה סגורה וחסומה ולא ריקה (כי נק' $(c,0,..0)$ שייכת לחיתוך)

לכן f מקבלת ערך מקסימלי ומינימלי בתוך $A \cap \overline{B_R}(\bar{0})$.

נשים לב שהפונק' $f(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ עבור $x_i > 0$, $i=\overline{1,n}$ מונוטונית עולה ולכן עבור הנק' $x_1=0$ או $x_2=0$ או ... או $x_n=0$ היא מקבלת מינימום ובנק' חשודה $x_i = \frac{c}{n}$ היא מקבלת מקסימום.

$$f\left(\frac{c}{n},\dots,\frac{c}{n}\right) = \left(\frac{c}{n}\right)^n \geq x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = f(x_1,\dots,x_n)$$

נק' מקסימום

עבור $y_i = \frac{1}{x_i}$ נקבל

$$\sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}$$ 1 iv

מצאו נק' קיצון עבור הפונק'

$$f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2-z^3$$

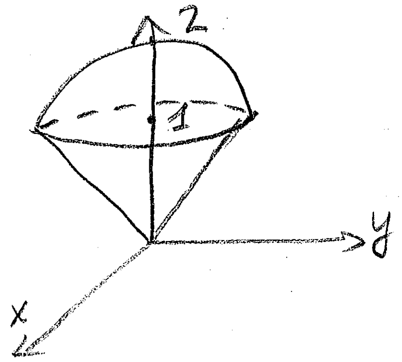
פתרון:

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ — חלק עליון של חרוט $z^2=x^2+y^2$

$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ — חלק עליון של ספירה

$$(z-1)^2+x^2+y^2=1$$

1) נמצא את חשודות בתוך התחום



$$f'_x=2x=0$$
$$f'_y=-2y=0$$
$$f'_z=2z-3z^2=0$$
$$z\cdot(2-3z)=0$$

$z=0$, M_1: $x=0$, $y=0$

$z=\frac{2}{3}$, M_2: $x=0$, $y=0$

לא את M_1, M_2 שייכות לתחום הנתון

2) נמצא את על השפה.

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2-y^2+z^2-z^3+\lambda(x^2+y^2-z^2)+\mu(x^2+y^2+(z-1)^2-1)$$

$$\begin{cases} F'_x=2x+2x\cdot\lambda+2x\cdot\mu=0 & (1)\\ F'_y=-2y+2y\cdot\lambda+2y\cdot\mu=0 & (2)\\ F'_z=2z-3z^2-2z\cdot\lambda+2\cdot(z-1)\cdot\mu=0 & (3)\\ F'_\lambda=x^2+y^2-z^2=0 & (4)\\ F'_\mu=x^2+y^2+(z-1)^2-1=0 & (5)\end{cases}$$

$(1)\quad 2x\cdot(1+\lambda+\mu)=0 \rightarrow x=0 \quad \xrightarrow{(4)} z=0$

$(2)\quad 2y\cdot(-1+\lambda+\mu)=0 \rightarrow y=0$

קבלנו את הנקודה $M_1(0,0,0)$

במקרה אם $x=0$

$$\Downarrow (4)$$

$$z=\pm y$$

$$\Downarrow (5)$$

$$y^2+(\pm y-1)^2-1=0$$

$$2y^2\pm 2y=0$$

$$y\cdot(y\pm 1)=0$$

$y=0 \qquad y=\pm 1$

מקבלים את הנקודות:

$M_3(0,1,1)$

$M_4(0,-1,1)$

באותה צורה אם $y=0$

$$\Downarrow (4)$$

$$z=\pm x$$

$$\Downarrow (5)$$

$$x^2+(\pm x-1)^2=1$$

$$x=\pm 1$$

$M_5(1,0,1)\ ,\ M_6(-1,0,1)$

נמצא ערך של הפונקציה בכל הנקודות

$f(M_1)=0 \qquad f(M_2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{27} \qquad f(M_3)=-1$

$f(M_4)=-1 \qquad f(M_5)=f(M_6)=1$

max נק׳ $-M_5, M_6$

min נק׳ $-M_3, M_4$

(2)

(א) מצאו את המרחק בין העקומות

$\gamma_1 \{z = a\cdot x,\ y=0\}$ ו-$\gamma_2 \{y = x^2 + c,\ z=0\}$

פתרון:

נעבור להצגה פרמטרית

עבור העקומות

$$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = a\cdot t \end{cases} \qquad \gamma_2: \begin{cases} x = s \\ y = s^2 + c \\ z = 0 \end{cases}$$

נגדיר פונקצית מרחק בריבוע

בין הנקודות על γ_1 ו- γ_2

$$d(t,s) = (t-s)^2 + (s^2+c)^2 + (a\cdot t)^2$$

נשים לב שעבור $c \le 0$ הפרבולה γ_2

חותכת את המישור $y=0$ כאשר

$$s^2 + c = 0 \rightarrow s = \pm\sqrt{-c}$$

עבור כל פרמטר אחר נקבל

$$d(t, \pm\sqrt{-c}) \le d(t,s) \quad \forall t,s$$

ולכן הנקודה הכי קרובה על הפרבולה

לקו ישר היא: $(\pm\sqrt{-c}, 0, 0)$,

נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין נק' (x_0, y_0)

וישר $0 = ax + by + c$.

$$d = \frac{|a x_0 + b\cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

עבור הישר $z=a\cdot x$ ו- $(\pm\sqrt{c},0)$

$$d=\frac{|z_0-a\cdot x_0|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{|a\cdot\sqrt{-c}|}{\sqrt{1+a^2}}$$

נבחן מקרה עבור $c>0$

$$\begin{cases} d'_t = 2\cdot(t-s)+a^2\cdot 2t=0 & (1)\\ d'_s=-2\cdot(t-s)+2\cdot(s^2+c)\cdot 2s=0 & (2)\end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \quad s=t\cdot(1+a^2)$

נציב ב (2)

$$t\cdot(a^2+2\cdot(1+a^2)\cdot(t^2+(1+a^2)^2+c)=0$$

עבור $c>0$ כל הביטוי פרט ל t חיובי

לכן פתרון יחיד. $t=0$
$s=0$

נוכיח שבאמת זו נקודת מינימום

$$d''_{tt}=2\cdot(1+a^2) \qquad d''_{ts}=d''_{st}=-2$$

$$d''_{ss}=2+12s^2+4c$$

$$H(0,0)=\begin{vmatrix}2(1+a^2) & -2\\ -2 & 2+4c\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(1+a^2)\cdot 2\cdot(1+2c)-4=4\cdot((1+a^2)\cdot(1+2c)-1)$$

$$=4\cdot(a^2+a^2\cdot 2c+2c)>0$$

$$d''_{tt}>0$$

לכן $(0,0)$ - נק' $\min$

$$d^2(0,0)=0+c^2+0. \rightarrow$$ מרחק בריבוע

$$d=c$$

2) ג) מצאו שטח מינימלי של אליפסה

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ שעוברת דרך $(1,3)$.

פתרון:

שטח של אליפסה

$$S=\pi a b$$

הנק' $(1,3)$ מקיימת את המשוואה
לכן מתקיים

$$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$$

נבנה פונק' לגרנג'

$$F(a,b,\lambda)=a\cdot b+\lambda\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}-1\right)$$

$$\begin{cases} F'_a=b-\frac{2\lambda}{a^3}=0 \rightarrow \lambda=\frac{ba^3}{2} \\ F'_b=a-\frac{2\lambda\cdot 9}{b^3}=0 \rightarrow \lambda=\frac{ab^3}{18} \\ F'_\lambda=\frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}-1=0 \end{cases}$$

$$\lambda=\frac{ba^3}{2}=\frac{a\cdot b^3}{2\cdot 9} \rightarrow a^2=\frac{b^2}{9} \rightarrow 9a^2=b^2$$

$$b=3a, \quad a,b>0$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{\cancel{9}}{\cancel{9}a^2}=1 \rightarrow \frac{2}{a^2}=1 \rightarrow a=\sqrt{2}$$
$$b=3\sqrt{2}$$

הפונק' $f(a,b)=a\cdot b$ מונוטוני - עולה עבור $a,b>0$
לכן היא לא מקבלת - מקסימום כי התחום לא חסום

3) נגדיר $A=A^T\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

$f(x) = \underline{x} A \underline{x}^T$

א) הוכיחו כי f מקבלת מקסימום/מינימום על
$S^{n-1}=\{\|x\|=1\}\subseteq\mathbb{R}^n$

ב) הוכיחו כי בכל נק' קיצון מתקיים $A\cdot x^T \sim x^T$.
הסיקו כי ל-A יש לפחות וקטור עצמי (ממשי) אחד $\bar{v}_1$.

ג) בדקו כי בנקודות קיצון של $f(\underline{x})$ תחת אילוץ $\|x\|=1$
מתקיים $(\underline{x},\underline{v})=0 \Leftarrow$ קיים וקטור עצמי נוסף $\bar{v}_2$.

ד) המשיכו את התהליך וקבלו שקיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$
המורכב מוקטורי עצמי של A.

פתרון
א)

$$f(\underline{x}) = \underline{x} A x^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j \rightarrow$$

פונק' רציפה בתחום חסום וסגור מקבלת ערכי מקסימום ומינימום!

נשתמש בפונק' לגרנז'

$$F(\underline{x},\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j + \lambda\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right)$$

$$F'_{x_k} = 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j - \lambda\cdot x_k\right) = 0$$

לכן בנק' הקיצון מתקיים

$$Ax = \lambda x$$

ב) כלומר קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש- $\nabla f = \lambda\cdot\nabla g$

לפי הגדרה של ע"ע מאלגברה מקבלים
שבנק' קיצון
וקטור עצמי $\bar{v}_1$ לקיצון מתקיים שקיים ערך עצמי λ ש

$$(A-\lambda\cdot I)\cdot v_1 = 0$$

ג) עבור שני וקטורים עצמיים של A מתקיים

$$\lambda(\bar{x},\bar{y}) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, A^T y) = (x, Ay) =$$

$=(x,\mu y)=\mu(x,y)$

לכן

$$(\lambda-\mu)\cdot(x,y)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}\perp\bar{y}$$

כלומר
קיים

$\lambda_1\neq\lambda_2$; $\bar{V}_1\perp\bar{V}_2$

ניתן לנרמל (את הגדלים)
ולקבל n וקטורים מאונכים כך ש

$$\|\bar{V}\|=\sum_{i=1}^{n}(V_i)^2=1$$

4

הוכיחו כי

$$vol_n \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = vol_n \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

פתרון:

נסמן

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

$$I^\circ = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$$

I° - פנים של I ומתקיים $I^\circ \leq I$

נגדיר חלוקה של I° סריג $T = T_1 \times \ldots \times T_n$

כאשר T_j חלוקה של הקטע (a_j, b_j)

ל- 2^k קטעים שווים כך ש- $T \leq I^\circ$

$$T_j : \{t_j^0 < t_j^1 < \ldots < t_j^{m_j}\}$$

הסריג של I° הנוצר ע"י T הוא קבוצה של כל התיבות ה-n מימדיות מהצורה

$$[t_1^{i_1 - 1}, t_1^{i_1}] \times \ldots \times [t_n^{i_n - 1}, t_n^{i_n}]$$

כאשר נפח של כל התיבות שווה $\left(\frac{1}{2^k}\right)^n$

באופן דומה נגדיר חלוקה $P = P_1 \times \ldots \times P_n$ של I כך ש- P_j חלוקה של $[a_j, b_j]$ ומתקיים $a_j, b_j \in P_j$, כלומר $I \leq P$

כמות התיבות שמכסות את השפה של I לא עולה על (היקף של I כפול 2)$/2^k$, ולכן מקבלים

$$0 \le \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) - Vol_n(T) \le \frac{4 \cdot \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)}{2^k} \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^n$$

$$0 \le vol_n(P) - \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \le \frac{4 \cdot \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)}{2^k} \left(\frac{1}{2^k}\right)^n$$

בגבול $k \to +\infty$ נקבל ש-

$$vol_n(T) \le vol_n(I^\circ) \le vol_n(I) \le vol_n(P)$$

$$\Downarrow$$

$$vol_n(I^\circ) = vol_n(\bar{I}) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

ג) $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

האם A בעל-תוכן אפס?

<u>פתרון:</u>

נניח שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \quad A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} vol_1(I_k) < \varepsilon$$

כיסוי סופי של קבוצה A

אז איחוד של I_k מכסה את הקטע $[0,1]$

פרט למספר סופי של נקודות, לכן

$$\sum_{k=1}^{n} vol_1(I_k) \geq 1$$

בסתירה לנתון

ii

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^1$$

פתרון

$$a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לפי הגדרת ההתכנסות

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n>n_0 \ \text{מתקיים} \ : 0<a_n<\frac{\varepsilon}{2}$$

כלומר, כל האיברים החל מ-n_0 נמצאים בקטע עם אורך $\varepsilon/2$.

קיים מספר סופי של איברים מחוץ לסביבה

$$a_1, \dots, a_{n_0}$$

נבנה כיסוי סופי עבור כל האיברים האלה

נבחר N_0 כך ש-

$$\frac{2}{N_0} < \frac{\varepsilon}{2n_0}$$

אז נקבל לכל a_n כאשר $n=1,\dots,n_0$

קיים כיסוי באורך $\frac{2}{N_0}$,

$$a_n \in \left(a_n-\frac{1}{N_0}, a_n+\frac{1}{N_0}\right)$$

כאשר סכום של קטעים,

$$\sum_{i=1}^{n_0}\frac{2}{N_0} = \frac{2}{N_0}\cdot n_0 < \frac{\varepsilon}{2n_0}\cdot n_0 < \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן אם נחבר כל הקטעים, נקבל

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(I_k) < \varepsilon$$

4. ג.

$S_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$

כך ש- $Vol_n(S_1)=0$, S_2 - חסומה

האם $Vol_{n+m}(S_1 \times S_2)=0$?

<u>פתרון:</u>

S_2 - חסומה ולכן קיימת תיבה K_m:

$$S_2 \subseteq K_m$$

$$K_m=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_m,b_m]$$

נסמן $\Leftarrow$ $vol_m(K_m)=\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)=c$

S_1 - קבוצה בעלת נפח אפס לכן קיים מספר סופי של תיבות מלבניות T_i כך ש-

$$S_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N} T_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} vol_n(T_i) < \frac{\varepsilon}{c}$$

לכן

$$S_1 \times S_2 \subseteq \left\{\bigcup_{i=1}^{N} T_i\right\} \times K_m$$

כך ש-

$$vol_{n+m}(S_1 \times S_2) \le \sum_{i=1}^{N} vol_n(T_i)\cdot vol_m(K_m) < \frac{\varepsilon}{c}\cdot c=\varepsilon$$