

מבחן מועד ג בפונקציות מרוכבות להנדסת חשמל

201.1.0071

סמסטר ב', שנה"ה תש"ף

תאריך: 12.10.2020

מרצים: א. גורן, א. פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר

משך הבחינה הוא שלוש שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוניס.

נקוד: סה"כ 115 נקודות.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) (10 נקודות) מצאו את $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ המקיימת $f(0) = 4i$ וגם

$$\operatorname{Re}(f(z)) = 4(\operatorname{Re}(z))(\operatorname{Im}(z))(\operatorname{Re}^2(z) - \operatorname{Im}^2(z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(2) (10 נקודות) תהי $f \in \mathcal{O}(\operatorname{Ball}_2(0))$ פונקציה אי-זוגית. הוכיחו שקיימת פונקציה אנליטית בטבעת $U = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ כך שלכל $z \in U$ מתקיים $z(1 - z^2)F'(z) = f(z)$.

(3) (15 נקודות) האם קיימת פונקציה אנליטית בטבעת $D = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$ שמקיימת $f(x) = |x|^5$ לכל $x \in D \cap \mathbb{R}$?

(4) (20 נקודות) תהי $f : \operatorname{Ball}_2(0) \rightarrow \operatorname{Ball}_2(0)$ פונקציה אנליטית המקיימת $f(0) = f'(0) = 0$. הראו כי לכל $z \in \operatorname{Ball}_2(0)$ מתקיים $|f(z)| \leq \frac{1}{2}|z|^2$.

(5) (20 נקודות) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. נניח שקבוצת הערכים של f זרה לקבוצה $i\mathbb{R}^+ = \{z \in \mathbb{C} : z = iy, y \in [0, +\infty)\}$. הוכיחו כי f בהכרח קבועה.

(6) (20 נקודות) חשבו את האינטגרל $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+4} dx$.

(7) (20 נקודות) חשבו את האינטגרל $\int_{|z|=1} \frac{1}{2020z - z^2 + z^4 - 19z^{19}} dz$.

(כאשר המסילה היא בכיוון החיובי).