יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2020 (מרצים: א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 0.

(חזרה על החומר הנלמד בקורסים הקודמים)

(1) (א) חשבו i^n, כאן $n \in \mathbb{Z}$.

(ב) יהי $0 \neq z = x + iy \in \mathbb{C}$. בטאו בעזרת x, y את הביטויים הבאים: i. $Re(\frac{1}{z})$, ii. $Im(\frac{1}{z^2})$.

(ג) הוכיחו: i. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ii. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|)^2$

iii. $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$. (מתי מתקיים השוויון?)

(ד) רשמו את נוסחאות המעבר בין הצגה קוטבית, $z = r(cos(\phi) + isin(\phi))$, לבין הצגה קרטזית, $z = x + iy$.

(ה) יהי $n \in \mathbb{N}$. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^n = 1$.

(ו) הוכיחו: אם $|z|, |w| < 1$ אז $\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| < 1$. (לתרגיל "חישובי" זה תהיה חשיבות רבה בהמשך)

(ז) הוכיחו/הפריכו: עבור כל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים: $z^4 + 4 = (z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i)$.

(2) (א) הוכיחו כי $x_\pm = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$ הינם פתרונות של המשוואה $x^2 + a_1 x + a_0 = 0$. כאן $a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

(ב) פתרו את המשוואות: i. $z^4 = 2 - i\sqrt{12}$ ii. $|z| + z = 1 - i$.

(ג) יהי $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ פולינום. הוכיחו/הפריכו: אם $p(z_0) = 0$ אז גם $p(\bar{z}_0) = 0$.

(3) (א) הגדירו את המושגים הבאים עבור קבוצות ב $\mathbb{R}^2$: קבוצה פתוחה, סגורה, קומפקטית, קשירה מסילתית,פשוטת קשר; נקודת פנים, נקודת שפה, סגור של קבוצה.

(ב) בדקו את כל התכונות/המושגים של סעיף א' עבור קבוצות ב $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ המוגדרות ע"י תנאים הבאים:

i. $az + b\bar{z} = c$ ii. $Re\big(z(1-i)\big) < \sqrt{2}$ iii. $|z-1| = 2+i$ iv. $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

v. $|z-i| = |z+i|$ vi. $|z-1| + |z-5| < 4$ vii. $|z-1| \leq |z-5|$.

(ג) הוכיחו: $X \subseteq \mathbb{R}^2$ סגורה אמ"מ $\mathbb{R}^2 \setminus X$ פתוחה.

(4) (א) הגדירו את המושג: התכנסות סדרת נקודות ב $\mathbb{R}^2$, $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

(ב) נגדיר סדרה $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{i + a_n}$. האם היא מתכנסת? (כסדרה ב $\mathbb{R}^2$)

(ג) הגדירו את המושגים: תחום ההתכנסות של טור, התכנסות בהחלט/בתנאי/במ"ש. בדקו את כל תכונות ההתכנסות עבור הטורים: i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}} x^n$ ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2sin(x))^n}{n^2+300}$ iii. $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^{n^3}}{n!}$.

(ד) פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור (סביב הנקודה $x = 0$). בדקו את כל תכונות ההתכנסות עבור הטורים.

i. $f(x) = sin^2(x^3)$ ii. $f(x) = sin(1-x) \cdot cos(1+x)$ iii. $f(x) = ln(\frac{1}{6 - 5x + x^2})$.

(5) עבור הפונקציות הבאות בדקו: רציפות, נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות, רציפות של נגזרות חלקיות. (בכל הנקודות)

i. $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot cos(\frac{y}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, ii. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

(6) חשבו את האינטגרלים (כיוון המסילה הוא נגד כיוון השעון): i. $\int\limits_{\{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\}} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$

ii. $\int\limits_{(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)} |y| ds$ iii. $\int\limits_{y = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}} \frac{ds}{y^2}$ iv. $\oint\limits_{\{x^2+y^2=36\}} \Big((e^{x^2} - x^2 y)dx + (xy^2 - e^y)dy\Big)$.

(7) העבירו את המשטח $\{(x+y)^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ לצורה קנונית $(\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1)$ ע"י סיבוב של $\mathbb{R}^3$. (ודאו שההעתקה הלינארית שלכם היא אכן סיבוב)

(8) (א) נגדיר העתקה $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^3 - 3 \\ sin(x_1) - e^{x_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. חשבו את מטריצת הנגזרות, $\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}$, בנקודות בהן ההעתקה הפיכה מקומית.

(ב) ההעתקה הלינארית (מרוכבת) $\mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathbb{C}$, $z \to i \cdot z$, משרה את ההעתקה הלינארית ממשית, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^2$. רשמו את המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. חשבו את מטריצת הנגזרות.