יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, 201.1.0071 (להנדסת חשמל)

אביב 2020 (מרצים: א. גורן, א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 10.

(1) (א) נניח ש $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ הינה חח"ע. הוכיחו: $f(z)=az+b$.

(ב) נניח ש $f,g\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימות: $|f(z)|\le|g(z)|$ ב $\mathbb{C}$ כולו. הוכיחו: $f(z)=cg(z)$, עבור קבוע $|c|\le 1$.

(ג) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ המקיימת: $|f(z)|\le|z|^{-\frac{3}{2}}$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. הוכיחו: $f(z)\equiv 0$.

(ד) האם קיימת $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ שמקיימת: $\{f(n)=0\}_{n\in\mathbb{N}}$ ובעלת קוטב ב $z=\infty$?

(ה) תהי $f\in\mathcal{O}(Ball_\epsilon(0)\setminus\{0\})$ ונניח ש: $\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(-\frac{1}{n})=-1$. הוכיחו: עבור כל קבוע $c\in\mathbb{C}$ קיימת סדרת נקודות $\{z_n\}\to 0$ כך ש $|\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)-c|<1$.

(ו) תהי $f\in\mathcal{O}(Ball_\epsilon(z_0)\setminus\{z_0\})$ ונניח ש $ord_{z_0}(f)\ne 0,\pm1$. הוכיחו: f לא חח"ע ב $Ball_\epsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$.

(2) (א) תהי f מרומורפית ב $\mathbb{C}$ ולא קבועה. הוכיחו: התמונה של f היא קבוצה צפופה ב $\mathbb{C}$.

(ב) תהי f מרומורפית בתחום חסום $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$. עבור כל תת קבוצה סגורה $X\subset\mathcal{U}$ הוכיחו: ל f יש לכל היותר מספר סופי של אפסים וקטבים ב X.

(ג) תהי f מרומורפית ב $\bar{\mathbb{C}}$. הוכיחו: ל f יש מספר סופי של נקודות סינגולריות.

(ד) תהי f מרומורפית ב $\mathbb{C}$. נניח שקיים גבול $\lim\limits_{z\to\infty}|f(z)|$, סופי או אינסופי. הוכיחו ש f פונקציה רציונלית. (מנה של שני פולינומים). הסיקו: אם בנוסף f אנליטית, אז היא פולינום.

(ה) תהי $g\in\mathcal{O}(\mathcal{U}\setminus\{z_0\})$ ו z_0 נקודה סינגולרית עיקרית. תהי $const\ne f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$. מה סוג הנקודה z_0 עבור $f(g(z))$?

(ו) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_n\})$. הוכיחו שקיימות פונקציות $f_0,f_1,\dots,f_n\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ כך ש $f(z)=f_0(z)+f_1(\frac{1}{z-a_1})+\dots+f_n(\frac{1}{z-a_n})$. (רמז: השתמשו בחלק העיקרי של טור לורן בכל נקודה סינגולרית)

(3) (א) חשבו את השאריות של הפונקציות הבאות בכל הנקודות הסינגולריות.

i. $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ ii. $z^n sin(\frac{1}{z})$ iii. $\frac{1}{sin(z)}-\frac{1}{tan(z)}$ iv. $cos(z)e^{\frac{1}{z}}$.

(ב) הוכיחו/הפריכו:

(i) אם $f\in\mathcal{O}(Ball_\epsilon(0))$ אז $f(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\frac{\epsilon}{2}}f(z)sin\frac{1}{z}dz$.

(ii) אם z_0 הינה סינגולריות סליקה של f אז $\underset{z=z_0}{Res}\,f(z)=0$.

(iii) נניח ש $f(z)=-f(-z)$ ו z_0 נקודה סינגולרית מבודדת. אז $\underset{z=-z_0}{Res}\,f=\underset{z=z_0}{Res}\,f$. (ומה קורה במקרה הזוגי?)

(iv) תהי f פונקציה זוגית, נניח ש $0,\infty$ נקודות סינגולריות מבודדות. אז $\underset{z=\infty}{Res}\,f=\underset{z=0}{Res}\,f=0$.

(ג) תהי $f\in\mathcal{O}(Ball_\epsilon(0)\setminus\{0\})$. בטאו את $\underset{z=0}{Res}(f(cz))$ בעזרת $\underset{z=0}{Res}(f(z))$ ו c.

(ד) חשבו את האינטגרלים הבאים:

i. $\int\limits_{\partial Box}\frac{e^z dz}{tan(z)}$, כאשר $Box=[-6,6]\times[-1,1]\subset\mathbb{C}$ ii. $\int\limits_{|z-2i|=1}\frac{Log(z)dz}{sin^3(z-2i)}$ iii. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{sin(\frac{1}{z})dz}{z-1}$

iv. $\int\limits_{|z|=R}\frac{zdz}{e^{2\pi i z^2}-1}$, כאשר $n<R^2<n+1$ עבור $n\in\mathbb{N}$ מסוים.

(ה) חשבו $\int\limits_\gamma\left(e^{1/\bar{z}}+e^{-1/\bar{z}}\right)dz$ כאשר $\gamma=\{re^{it}|\ t\in[0,\pi]\}$.

(4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

i. $\int\limits_0^\pi\frac{cos^2(x)dx}{1-a\cdot sin^2(x)}$, עבור $0<a<1$ ii. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{cos(nx)}{a-cos(x)}dx$, עבור $a>1$, $n\in\mathbb{N}$ iii. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{|ae^{it}-b|^4}$, עבור $0<a<b$.