יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2020 (מרצים: א. גורן, א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 11.

(1) חשבו אינטגרלים:

(א) i. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x+x^2}$ ii. $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{1+x^2}}}{1+x^2}dx$ iii. $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}$ עבור $n>0$.

(כאן ניתן לעבור ל $\int_{-\infty}^{\infty}(\dots)$ או להשתמש בקרן בזוית α ביחס לציר $\hat{x}$. מהו α? איזו דרך קצרה יותר?)

(ב) במקרים הבאים התבוננו במלבן עם קודקודים $\{R, R+y_0i, -R+y_0i, -R\}$ עבור y_0 המתאים:

i. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}dx}{e^x+1}$, עבור $0<a<1$ ii. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(x)dx}{e^x+e^{-x}}$

(ג) בתרגיל בית 5, (שאלה ג.4) הוכחנו את למת ז'ורדן, עבור חצי-מעגל העליון: $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma}e^{iaz}f(z)dz=0$, $a>0$.

האם אותה טענה נכונה גם עבור חצי-מעגל התחתון? (רמז: שארית של $f(z)=\frac{1}{z^n}$).

(ד) i. $\int_{0}^{\infty}\frac{xsin(x)}{x^2+a^2}dx$, $a>0$ ii. $\int_{0}^{\infty}\frac{cos(x)dx}{\prod_{i=1}^{n}(x^2+a_i^2)}$, $n\geq 1$, $0<a_1<a_2<\cdots$ iii. $\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}sin(t^2)dt$

(גזרה עם זווית $\theta=\frac{\pi}{8}$ והערך הידוע של $\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx$) iv. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin(x)}{x}dx$ v. $\int_{0}^{\infty}\frac{sin^2(x)}{x^2}dx$

כאן ניתן להשתמש או בהצגה $\frac{sin(x)}{x}=Im(\frac{e^{ix}-1}{x})$ או במסלול $\{-\infty\rightsquigarrow-\epsilon\rightsquigarrow i\epsilon\rightsquigarrow\epsilon\rightsquigarrow\infty\}$.

(2) (א) התמרת פורייה של f מוגדרת ע"י $\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx$. מצאו את התמרת פורייה בקרים הבאים.

i. $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$ (האם התשובה תלויה בסימן של t?) ii. $f(x)=e^{-x^2}$ (היעזרו בשאלה 1)

iii. $f(x)=\frac{1}{p(x)}$ עבור פולינום $p(x)$ עם שורשים לא ממשיים, שונים, $z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2,\dots,z_n,\overline{z}_n$.

.

(ב) התמרת לפלס של f מוגדרת ע"י $\mathfrak{L}(f)(s)=\int_{0}^{\infty}f(x)e^{-sx}dx$. התמרת לפלס הפוכה של $F(s)$ מוגדרת ע"י $\mathfrak{L}^{-1}(F)(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{t\to\infty}\int_{\lambda-it}^{\lambda+it}F(s)e^{sx}ds$, כאשר $\lambda\in\mathbb{R}$ הינו קבוע כך שכל הנקודות הסינגולריות של $F(s)$ נמצאות משמאל לישר $Re(z)=\lambda$. (אינטגרל זה נקרא $Bromwich\ integral$ או $Fourier-Mellin\ integral$)

חשבו $\mathfrak{L}^{-1}(F)$ עבור פונקציות הבאות: i. $F(s)=\frac{1}{(a+s)^n}$ ii. $F(s)=\frac{1}{s^2-a^2}$.

(3) (א) עבור פולינומים $p(z),q(z)$ עם $deg(q)>deg(p)+1$ חשבו את $\underset{z=\infty}{Res}\frac{p(z)}{q(z)}$.

(ב) הוכיחו/הפריכו (תפתרו בכמה דרכים שונות)

(i) אם ∞ נקודה סינגולרית מבודדת של f אז $\underset{z=\infty}{Res}f(z)=\underset{w=0}{Res}f(\frac{1}{w})$.

(ii) אם ∞ נקודה סינגולרית סליקה של f אז $\underset{z=\infty}{Res}f(z)=0$.

(iii) אם $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ אז $\underset{z=\infty}{Res}f(z)=0$.

(ג) חשבו: $\int_{|z|=10}\frac{sin(\frac{1}{z})dz}{cos(\frac{1}{z+i})}$.

(ד) באילו מהתחומים הבאים קיימת פונקציה קדומה לפונקציה $f(z)=\frac{1}{sin\frac{1}{z^2}}$?

i. $\{Im(z)<0,\ Re(z)>0\}$ ii. $Ball_1(1)\setminus\{\frac{\pm1}{\sqrt{\pi n}}|\ 0\neq n\in\mathbb{Z}\}$ iii. $\mathbb{C}\setminus Ball_1(0)$.

(4) (א) חשבו את $\underset{z=\infty}{Res}(f)$ עבור $f(z)=Log\frac{z}{z+2}$. האם ל f קיימת פונקציה קדומה בתחום $\mathbb{C}\setminus[-2,0]$?

(ב) נגדיר $g(z)=e^{\frac{f(z)}{n}}$. בדקו כי g הינה ענף אנליטי של $\sqrt[n]{\frac{z}{z+2}}$. באיזה תחום? חשבו את $\int_{|z|=3}g(z)dz$.