# יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2020 (מרצים: א. גורן, א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 12.

(1) <u>שאלות חזרה</u>

(א) נניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $|f(z)| \neq 1$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$. האם $f$ בהכרח קבועה?

(ב) יהי $\Delta$ משולש שווה צלעות, עם קודקודים $a, b, c$. נגדיר $f(z) = |(z-a)(z-b)(z-c)|$.
מצאו את $\sup_{z\in\Delta}|f(z)|$. (רמז: את התנאי $z \in [a, b]$ כדאי לנסח בצורה $z = a(\frac{1}{2}+t) + b(\frac{1}{2}-t)$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.)

(ג) יהי $\mathcal{U}$ תחום חסום ותהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ ורציפה ב $\overline{\mathcal{U}}$. ניקח פולינום $p(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$, שכל השורשים שלו פשוטים ונמצאים ב $\mathcal{U}$. נגדיר $q(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{U}} \frac{f(w)}{p(w)}\frac{p(w)-p(z)}{w-z}dw$. הוכיחו: $q(z)$ הינו פולינום המקיים: $\{q(z_j) = f(z_j)\}$.
(ל $q(z)$ קוראים $Lagrange\ interpolating\ polynomial$ ויש לו שימושים רבים באנליזה נומרית)

(ד) נראה הוכחה נוספת של משפט Liouville. תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ פונקציה חסומה.

(i) בהינתן $a, b \in \mathbb{C}$ נקודות זרות, חשבו $\int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$, כאן $R > max(|a|, |b|)$.

(ii) מבלי להשתמש בסעיף (א), הוכיחו: $\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = 0$. הסיקו את המשפט.

(2) חשבו: i. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^5+z+1}$ ii. $\oint_{|z|=R\gg 1} \frac{dz}{p(z)}$, כאן $p(z) = c_d z^d + \cdots + c_0$, $c_d \neq 0$ iii. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)^2 sin(x-i)}$

iv. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(i+x)^2 sin\left(\frac{i-x}{i+x} - \frac{1}{3}\right)}$ (כאן $x$ ממשי) v. $\int_{\gamma} \frac{dz}{(e^{1-z}-1)(z^3-1)}$, עבור העקום: $\gamma = \{z = x + iy|\ x = \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{C}$.

(3) הוכיחו: למשוואה $sin(tan(z)) - tan(sin(z)) = \epsilon z^4$ יש לפחות 3 שורשים שונים, כאשר $0 \neq |\epsilon| \ll 1$.

(4) (א) תהי $f$ מרומורפית ב $\mathbb{C}$, כך שכל האפסים והקטבים שלה נמצאים בתוך $Ball_r(z_0)$. הוכיחו:

i. קיימת פונקציה $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{Ball_r(z_0)})$ המקיימת $f(z) = e^{h(z)}$ אמ"מ

ii. מספר האפסים של $f$ ב $Ball_r(z_0)$ שווה למספר הקטבים (כולל הריבויים).

הסיקו: אם $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ לא מתאפסת באף נקודה אז $f(z) = e^{h(z)}$ עבור $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. (כלומר $Log(f)$ מוגדר היטב)

(ב) תהיינה $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. הוכיחו: $f^2 + g^2 \equiv 1$ אמ"מ קיימת $\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ כך ש $g(z) = sin(\phi(z))$, $f(z) = cos(\phi(z))$.

(ג) תהי $f$ מרומורפית ב $\mathbb{C}$. נניח שקבוצת הערכים של $f$ זרה לתת קבוצה $\mathbb{R}_{\leq 0} \subset \mathbb{C}$. הוכיחו: $f = const$.

(5) (א) יהי $p(z)$ פולינום מדרגה $n$. חשבו $\lim_{R\to\infty} \oint_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}dz$.

(ב) נגדיר מסילה $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ כאשר $\gamma_1(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_2(t) = -1 + 2e^{-2it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_3(t) = 1 - i + e^{it}$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}]$. חשבו את האינדקס $\eta(\gamma, z)$ עבור כל $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

(ג) מצאו את האינדקס של מסילות הבאות, ביחס לראשית:

i. $\{|z| = 1\} \xrightarrow{sin} \mathbb{C}$ ii. $\{|z| = 17\} \xrightarrow{sin} \mathbb{C}$ iii. $\{|z| = 4\pi + \frac{\pi}{4}\} \xrightarrow{\frac{cos(z)}{sin^2(z)}} \mathbb{C}$.

(ד) יהי $\mathcal{U} \subset \{z|\ Re(z) > 0\}$ תחום חסום ותהי $f(z) = e^{-z} - a_0 - a_1 z$, $a_0 > 1$, $a_1 \geq 0$.
מצאו את האינדקס של מסילה $\partial\mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$.

.

(ה) נגדיר $[0, 2\pi] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}$ ע"י $\gamma(t) = \dfrac{\Big((cos(2t)-cos(t))+i(sin(2t)-sin(t))+0.25\Big)e^{\frac{cos(t)-2-isin(t)}{5-4cos(t)}}}{\frac{1}{2}sin\Big(cos(t)+isin(t)\Big)-isin(t)-cos(t)}$. כמה פעמים $\gamma$ מקיפה את הראשית? (הדרכה: מצאו פונקציה $f$ כך ש $\gamma(t) = f(e^{it})$. בטאו את אינדקס $\eta(\gamma, 0)$ בעזרת $f$.)

(ו) מצאו את מספר האפסים של $f(z) = z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3$ בתחום $\{z|\ Re(z) > 0\}$. (הדרכה: נגדיר מסילה סגורה $[iR, -iR] \cup \Gamma_R$, כאשר $\Gamma_R$= חצי מעגל העובר דרך הנקודות $-iR, R, iR$. השתמשו בעקרון הארגומנט עבור $f(z)$ בתוך המסילה ובדקו את הגבול $R \to \infty$. שימו לב שהפולינום $z^4 + 3z^2 + 3$ לא מתאפס עבור $z \in i\mathbb{R}$.)