יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071
אביב 2020 (מרצים: א. גורן, א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 13.

(1) (א) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ לא קבועה. הוכיחו ש f שולחת קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות.
(הוכחנו בהרצאות בהנחה ש $f'(z)$ לא מתאפסת באף נקודה. עכשיו ניתן לטפל גם מקרה הכללי)
האם הטענה מתקיים גם עבור פונקציות ממשיות?

(ב) יהי $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ פתוח. האם קיימת $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ שתמונתה היא $\mathbb{C} \setminus (0,1)$?

(ג) יהי $\mathcal{U}$ תחום פשוט קשר ותהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. נניח ש f מתאפסת רק בנקודה $z_0 \in \mathcal{U}$ ו $ord_{z_0}(f) = n$.
הוכיחו: קיימת הצגה $f(z) = (g(z))^n$, כאשר $g'(z_0) \neq 0$ ו g אנליטית ב $\mathcal{U}$ <u>כולו</u>.

.

(2) (א) (הכללה של עקרון הארגומנט) תהי f מרומורפית ב $\overline{\mathcal{U}}$ עם אפסים בנקודות $z_1, \ldots, z_k \in \mathcal{U}$, מסדרים $n_1, \ldots, n_k$,
ועם קטבים בנקודות $w_1, \ldots, w_l \in \mathcal{U}$ מסדרים $m_1, \ldots, m_l$. תהי $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathcal{U}})$, שלא מתאפסות באף נקודה של $\partial\mathcal{U}$.
הוכיחו: $\sum\limits_{j=1}^{k} n_j g(z_j) - \sum\limits_{j=1}^{l} m_j g(w_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{U}} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

(ב) נגדיר $p(z) = z^{10} + 3z^3 + 1$ ונתבונן בעקומה $p(\partial Ball_1(0))$. כמה פעמים העקומה עוקפת את הראשית?

(ג) נניח שפונקציה רציונלית $\frac{p(z)}{q(z)}$ מקבלת רק ערכים ממשיים סופיים על $\{|z|=1\}$. מה ניתן להגיד על האפסים/קטבים שלה?

(ד) כמה פתרונות יש למשוואה $z^7 + z^3 - 4z + 1 = 0$ ב $\{z| \ 1 < |z| < 3\}$?

(ה) תהי $Ball_2(0) \xrightarrow{f} Ball_1(0)$ פונקציה אנליטית. כמה פתרונות יש למשוואה $f(z) = z^n$ ב $Ball_2(0)$?

(ו) נניח ש $Re(c) > 1$. כמה פתרונות של משוואה $ze^{c-z} = 1$ נמצאים בתוך $Ball_1(0)$?

(ז) תהינה $f, g \in Ball_\epsilon(0)$ ונניח ש $|\frac{g}{f}| < 10^{-10}$ על $\partial Ball_\epsilon(0)$. האם $\frac{g}{f}$ בהכרח חסומה ב $Ball_\epsilon(0)$?

(3) (א) תהי $\mathbb{C} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$ העתקה (לא בהכרח אנליטית) ששומרת מרחקים, כלומר $|\phi(z_1) - \phi(z_2)| = |z_1 - z_2|$.
הוכיחו שהעתקה היא $\phi(z) = e^{i\theta} z + z_0$ או $\phi(z) = e^{i\theta}\overline{z} + z_0$. (רמז: הזזות וסיבובים שומרים מרחקים.
לכן ניתן להניח: $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$. מכאן ניתן לקבל: ϕ פועלת כזהות על ציר ממשי. לכן $\phi(i) = \pm i$.)

(ב) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ ונניח ש $ord_{z_0} f(z) = p$. הוכיחו: העתקה f כופלת זויות בנקודה z_0 ב p.

(ג) תהי $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathcal{U}$ העתקה גזירה ברציפות (במובן הממשי). הוכיחו: f קונפורמית אמ"מ f אנליטית, עם נגזרת לא מתאפסת.
(את הכיוון $\Rightarrow$ ראינו בהרצאה. עבור הכיוון $\Leftarrow$ בדקו שמטריצת הנגזרות, D_f, מקיימת את תנאי קושי-רימן בכל נקודה)

(4) (א) נגדיר $f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ וגם $g(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$. הוכיחו: $f(g(z)) = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}$ כאשר $\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$.
הסיקו מכאן: העתקה $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ הפיכה אמ"מ $ad \neq bc$. רשמו את הביטו עבור f^{-1}.

(ב) נגדיר $T(z) = \frac{z}{3z+1}$, $S(z) = \frac{2z-1}{z-3i}$. חשבו: i. $T \circ S$, ii. $S \circ T$, iii. $S^{-1} \circ T \circ S$.

(ג) נגדיר העתקות בסיסיות: מתיחה ($z \xrightarrow{S_\lambda} \lambda z$), הזזה ($z \xrightarrow{T_a} z + a$), היפוך ($z \xrightarrow{Inv} \frac{1}{z}$).
(i) הוכיחו: כל העתקה $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ ניתנת להצגה כהרכבה של העתקות: $T_\gamma \circ S_\beta \circ Inv \circ T_\lambda$.
(ii) הוכיחו: העתקות Möbius ששולחות את 0 ל ∞ הן בדיוק מהצורה $T_\gamma \circ S_\beta \circ Inv$.
(iii) מה התכונה המאפיינת של העתקות מהצורה $S_\gamma \circ Inv \circ T_\beta$?

(ד) מצאו את כל נקודות השבת של העתקה $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

(ה) הוכיחו שהעתקה $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ שולחת מעגלים וישרים למעגלים וישרים.
(הדרכה: השתמשו בהצגה כללית של ישרים/מעגלים, $pz\overline{z} + qz + r\overline{z} + s = 0$. שימו לב: כאן $p, q, r, s \in \mathbb{R}$)