יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, 201.1.0071 (להנדסת חשמל)

אביב 2020 (מרצים: א. גורן, א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 14.

(1) (א) תהי $f(z)=\frac{2z+1}{z+2}$. קבלו נוסחה סגורה עבור פונקציה $\overbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}^{n}$. (רמז: איך מעלים מטריצות לחזקה?)

(ב) תהי f העתקת Möbius.

(i) הוכיחו: ישר $l\subset\bar{\mathbb{C}}$ נשלח לישר (אחר) אמ"מ $f(z_0)=\infty$ עבור נקודה מסוימת $z_0\in l$.
(ומה קורה אם אין נקודה כזו?)

(ii) הוכיחו:מעגל $S^1\subset\mathbb{C}$ נשלח למעגל (אחר) אמ"מ $f(z_0)\neq\infty$ עבור כל $z_0\in S^1$.

(ג) נגדיר העתקה $z\to\frac{1}{z}$. תארו את תמונות הקבוצות $\{z|\ |z|^2=a\cdot Re(z)\}$, $\{z|\ Im(z)=Re(z)+b\}$.

(ד) עבור אילו ערכים של z_0 העתקה $f(z)=\frac{z-3}{1-2z}$ שולחת את $\partial Ball_1(z_0)$ לקו ישר?

(ה) תהי f העתקת Möbius המקיימת $f(\bar{\mathbb{R}})=\bar{\mathbb{R}}$. הוכיחו שניתן להציגה בצורה $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

(ו) נגדיר $f(z)=\frac{2z+i}{2+iz}$ ונגדיר את התחום $D^+=\{z|\ |z|<1,\ Im(z)>0\}$. ציירו את הקבוצה $f(D^+)\subseteq\bar{\mathbb{C}}$.

(ז) נסמן $Q_1=\{z|\ Im(z)>0,\ Re(z)>0\}$ ויהי D^+ התחום של השאלה הקודמת.
מצאו את העתקת Möbius המקיימת: $f(D^+)=Q_1$.

(2) (א) תארו את כל העתקות Möbius המקיימות $f(\partial Ball_1(0))=\partial Ball_1(0)$.

(ב) הראו שלכל $|a|<R$ העתקה $f(z)=\frac{R(z-a)}{R^2-\bar{a}z}$ מקיימת: $f(Ball_R(0))=Ball_1(0)$, $f(a)=0$.

(ג) בסעיפים הבאים בדקו האם קיימת העתקת Möbius המעבירה את התחום הראשון לשני.
אם קיימת מצאו כזו, אם לא הסבירו למה.

i. $Ball_2(0)\to\mathbb{C}$ ii. $\mathbb{C}\to\bar{\mathbb{C}}$ iii. $Ball_1(0)\to\{z|\ Im(z)>Re(z)\}$

iv. $Ball_1(1+i)\cup Ball_1(-1-i)\to\{z|\ Re(z)>0\}$ v. $Ball_1(1+i)\cup Ball_1(-1-i)\to\{z|\ |Re(z)|>1\}$

vi. תחום $Ball_2(1+i)\cup Ball_2(-1+i)\cup Ball_2(i(1-\sqrt{3}))$ לתחום
$\{z|\ Im(z)>0,\ Im(z)+Re(z)<1,\ Im(z)-Re(z)<1\}$.

(3) (א) יהי $\mathcal{U}=\{Im(z)>0\}$ ותהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$, רציפה ב $\overline{\mathcal{U}}$. נניח ש $|f|_{\partial\mathcal{U}}|\leq 1$, הגבול $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ סופי, ו $f(i)=0$.
הוכיחו: $|f(z)|\leq|\frac{z-i}{z+i}|$ ב $\mathcal{U}$.

(ב) (i) תהי $Ball_1(0)\xrightarrow{f}Ball_1(0)$ אנליטית, $f(z_0)=0$, עבור $z_0\in Ball_1(0)$. הוכיחו: $|f(z)|\leq\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right|$.

(ii) נניח שבנוסף מתקיים: $f'(a)=1$. מצאו את f.

(ג) תהי $f\in\mathcal{O}(Ball_1(0))$ המקיימת: $|f|_{|z|=1}|=1$. הוכיחו: $f(z)=c\prod\frac{z-z_i}{1-\overline{z_i}z}$, כאן $\{z_i\in Ball_1(0)\}$ נקודות לא בהכרח שונות ו $|c|=1$.

(ד) תהי $Ball_1(0)\xrightarrow{f}Ball_r(0)$ אנליטית, $r<1$. הוכיחו שלפונקציה f קיימת בדיוק נקודת שבת אחת. (כלומר למשוואה $f(z)=z$ יש בדיוק פתרון אחד ב $Ball_1(0)$.) בכמה דרכים שונות תוכלו לפתור את השאלה זו?

(ה) מצאו את מקסימום של $|f|$ בתחום $\mathcal{U}=\{Re(z)\leq\frac{1}{2}\}$ עבור $f(z)=(\frac{z}{1-z})^6-(\frac{z}{1-z})^2+2$.

(ו) מצאו את $sup|\frac{2}{\bar{z}^6}-\frac{3}{\bar{z}^3}+1|$ בתחום $\mathcal{U}=\{|z|>1\}$.

(ז) פתרו את שאלה $2.iv$ מתרגיל בית 12 בעזרת העתקת Möbius.

(ח) חשבו $\int\limits_{\gamma}\frac{tan\frac{4+iz}{1-z}}{(z-1)^2}dz$ כאשר $\gamma=\{z=x+iy|\ 8y=2x+15,\ x\in(-\infty,\infty)\}$.

(ט) חשבו $\int\limits_{\partial\mathcal{U}}sin(z)e^{\frac{1}{z}}dz$ עבור $\mathcal{U}=\{-2<x+y<-1,\ 0<y-x<1\}$.

(4) העתקות מיוביוס מאוד שימושיות בהנדסה.

(א) העתקה $s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ חשובה ב $digital\ signal\ processing\ and\ discrete-time\ control\ theory$.

(ב) העתקה $H_d(z)=H_a(K)\prod^N\frac{z-\xi_i^d}{z-p_i^d}$ מתארת את $general\ continuous-time\ IIR\ filter\ of\ order N$.

(ג) עבור $simple\ low-pass\ RC\ filter$ משתמשים ב $H_d(z)=\frac{1+z}{(1-2RC/T)+(1+2RC/T)z}$.