יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2020 (מרצים: א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 2.

(1) (א) נגדיר f בקואורדינטות קוטביות, עם $\theta \in (0, 2\pi]$, ע"י $f(z) = \begin{cases} \frac{r}{\theta}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$.
האם f רציפה לאורך כל ישר (ממשי) דרך 0? האם f רציפה ב 0?

(ב) הוכיחו: פונקציה $\mathbb{C} \supseteq \mathcal{U} \xrightarrow{f=u+iv} \mathbb{C}$ רציפה (במובן המרוכב) אמ"מ הפונקציה $\mathbb{R}^2 \supseteq \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ רציפה (במובן הממשי).

(2) (א) נניח ש $\mathbb{C} \supseteq \mathscr{D} \xrightarrow{f,g} \mathbb{C}$ גזירות (במובן המרוכב). קבלו (הוכיחו) את הנוסחאות עבור: i. $(f(z)g(z))'$ ii. $(\frac{f(z)}{g(z)})'$.

(ב) הוכיחו את כלל השרשרת: אם $\mathscr{D}_g \xrightarrow{g} \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ גזירות בנקודות w_0, $g(w_0)$ אז $f(g(w))|_{w_0} = f'|_{g(w_0)} \cdot g'|_{w_0}$.

(ג) אילו מבין פונקציות הבאות הן פונקציות אנליטיות? (באילו תחומים?) (כאן $z = x + iy$)
i. $f(z) = \frac{ix+1}{y}$ ii. $f(z) = z \cdot Re(z)$ iii. $f(z) = cos(x) \cdot cosh(y) - isin(x) \cdot sinh(y)$.

(ד) קבלו הצגה קוטבית של משוואות Cauchy-Riemann: $\frac{\partial f}{\partial \phi} = ir\frac{\partial f}{\partial r}$. רשמו אותם בצורה מפורשת עבור $f = u + iv$.

(3) בהרצאה הגדרנו $e^{x+iy} := e^x\big(cos(y) + isin(y)\big)$.

(א) מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $e^z = 1 + i$.

(ב) בדקו: i. $e^z e^w = e^{z+w}$ ii. $(e^z)^n = e^{nz}$ iii. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ iv. $|e^z| = e^x$ v. $e^{z+2\pi i} = e^z$.

(ג) ציירו את התמונה ע"י $exp(z)$ של קבוצות הבאות:
i. $\{z|\ Im(z) = 0\}$ ii. $\{z|\ Re(z) = 0\}$ iii. ישר ב $\mathbb{C}$ העובר דרך 0. iv. ישר כלשהו ב $\mathbb{C}$.

(ד) חשבו $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. הסיקו מכאן: $|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}| \leq \frac{1}{|sin\frac{x}{2}|}$, עבור כל $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi\mathbb{Z}\}$ וכל $n \in \mathbb{N}$.

(ה) חשבו (כלומר, רשמו את התשובה כביטוי קצר דרך cos, sin)
i. $\sum_{k=0}^{n-1} cos(a + kb)$ ii. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(a + kb)$ iii. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+e^{it}+\cdots+e^{nit}}{n}$.

(ו) בדקו ש e^z הינה פונקציה אנליטיות וחשבו את נגזרתה.

(ז) (התנהגות של e^z באינסוף) נתבונן ב $e^{\frac{1}{z}}$. הראו שעבור כל $\epsilon > 0$ התמונה של $Ball_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ ע"י $e^{\frac{1}{z}}$ היא $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
בפרט, $e^{\frac{1}{z}}$ מקבלת כל ערך, פרט ל 0, אינסוף פעמים בכל סביבה של 0. בפרט, הגבול $\lim_{z\to 0}(e^{\frac{1}{z}})$ רחוק מלהיות קיים.

(4) נגדיר $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. (אז בפרט: $e^{iz} = cos(z) + i \cdot sin(z)$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$.)

(א) הוכיחו שהפונקציות אנליטיות ומתקיים: $cos'(z) = -sin(z)$, $sin'(z) = cos(z)$,
$cos(z + 2\pi) = -cos(z + \pi) = cos(z)$, $sin(z + \frac{\pi}{2}) = cos(z)$.

(ב) קבלו את הנוסחאות $sin(z + w) = \cdots$, $cos(z + w) = \cdots$, $sin(2z) = \cdots$, $cos(2z) = \cdots$.

(ג) בדקו: $cos(x + iy) = cos(x) \cdot cosh(y) - isin(x) \cdot sinh(y)$.

(5) (א) תהי $f \in \mathcal{O}(D)$ ונניח שמתקיים: $a \cdot u(z) + b \cdot v(z) + c = 0$. מצאו את f.

(ב) תארו את כל הפונקציות האנליטיות $f = u + iv$ שעבורן
i. $u(x, y) = x^2 - y^2$ ii. $u(x, y) = x^2 + y^2$ iii. $f(x, y) = u(x) + iv(y)$ iv. $|f(x, y)| = e^y$