יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2020 (מרצים: א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 3.

(1) יהי $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר מסילתית ותהי $f = u + iv \in \mathcal{O}(\mathscr{D})$.

(א) הוכיחו: אם $u = const$ אז $f = const$.

(ב) הוכיחו: אם $|f| = const$ אז $f = const$. (הערה: ניתן לפתור את א',ב' לפחות בשתי דרכים שונות.)

(ג) יהי $p(t_1, t_2) \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ פולינום לא קבוע עם מקדמים ממשיים. הוכיחו: אם $p(u, v) = const$ אז $f = const$.

(הדרכה: כמו בסעיפים הקודמים קבלו: $\frac{\partial p}{\partial t_1}|_{(u,v)} = 0 = \frac{\partial p}{\partial t_2}|_{(u,v)}$. הפעילו אינדוקציה.)

(2) הפונקציות הבאות הינן פונקציות אלמנטריות במשתנים (x, y) או (r, ϕ). האם ניתן להציג אותן כפונקציות אלמנטריות במשתנה יחיד z?

i. $f(x, y) = log(x^2 + y^2) + 2i \cdot artcan\frac{y}{x}$ ii. $f(re^{i\phi}) = \frac{cos(2\phi) - i \cdot sin(2\phi)}{r^2}$.

(3) יהי $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}$ תחום סימטרי ביחס לציר $\hat{x}$ (כלומר הוא נשמר תחת הצמדה).

הוכיחו: פונקציה $\mathscr{D} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ אנליטית אמ"מ $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ אנליטית.

(4) תהי $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ פונקציה גזירה ברציפות, עם המישור המשיק (בנקודה מסוימת): $\{x_1 + 2x_3 = 0,\ x_2 + 3x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.
נגדיר $z = x_1 + ix_2$, $w = x_3 + ix_4$ ונחשוב על f כפונקציה $\mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$. האם f יכולה להיות אנליטית?
(רמז: האם המישור המשיק הינו תת-מרחב וקטורי מרוכב?)

(5) (א) תהי $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $\partial_x f - i \cdot \partial_y f = 0$ (ב $\mathbb{R}^2$ כולו). האם f בהכרח קבועה?

(ב) נניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$. הוכיחו: $f(z) = e^z$. (רמז: התבוננו ב $f(z)e^{-z}$)

(6) (א) יהי f הענף הראשי של $\sqrt[n]{z}$. הוכיחו/הפריכו:

i. $\sqrt[n]{z^n} = z$ ii. $(\sqrt[n]{z})^n = z$ iii. $\sqrt{z \cdot e^{2\pi i}} = \sqrt{z}$ iv. $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$

v. אם z, w, zw נמצאים בתחום הגדרה של הענף הראשי אז $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$

vi. אם $Re(z) > 0, Re(w) > 0$ אז $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$ vii. $\sqrt[n]{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\sqrt[n]{z}}$.

(ב) תארו את התמונה של הענף הראשי של $\sqrt[n]{z}$. לאן הפונקציה שולחת את הקרן $Ray_{a,b} := \{(at, bt) | t \in \mathbb{R}_{>0}\}$?

(ג) יהי $\{Re(z) < 0\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ ענף אנליטי של $\sqrt[4]{z}$ המקיים $f(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}) = e^{\frac{11\pi i}{16}}$. חשבו את $f(-1)$.

(ד) יהי $\mathscr{D} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$. חשבו $\frac{z \cdot f'(z)}{f(z)}$.

(ה) יהיו $\mathscr{D} \xrightarrow{f_1, f_2} \mathbb{C}$ שני ענפים אנליטיים של $\sqrt[n]{z}$. חשבו: $\frac{f_1(z) f_2'(z)}{f_1'(z) f_2(z)}$ עבור כל $0 \neq z \in \mathscr{D}$.

(7) (א) נראה שלא ניתן להכליל את משפט על ערך הביניים (של חדו"א 1) לפונקציות מרוכבות. נתבונן ב $f(z) = e^{iz}$ המוגדרת על קטע $[0, \pi] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. הראו שאף נקודה של קטע $(f(\pi), f(0)) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ לא מתקבלת כערך של f.
(למרות ש f רציפה.)

(ב) נזכיר את משפט $Lagrange$ (של חדו"א 1): אם $[a, b] \xrightarrow{f} R$ רציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. האם המשפט מתקיים עבור פונקציות מרוכבות?