



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071
אביב 2020 (מרצים: א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)
תרגיל בית מס' 5.

- (1) פונקציה $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת זוגית אם מתקיים $f(z) = f(-z)$ עבור כל $z \in \mathcal{U}$. (ואי-זוגית כאשר $f(z) = -f(-z)$)
(א) אילו מבין $\cos(z), \sin(z), \ln(z\bar{z}), \text{Log}(z^2), \sqrt[2]{z^2}$ הן (אי-)זוגיות?
(ב) הוכיחו שכל פונקציה $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ניתנת לייצוג כ $f = f_+ + f_-$ כאשר f_+ זוגית ו f_- אי-זוגית.
(ג) הוכיחו: $f \in \mathcal{O}(Ball_r(0))$ הנה (אי-)זוגית אם"מ טור טיילור שלה ב $z = 0$ מכיל רק חזקות (אי-)זוגיות.

(2) הוכיחו: $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$. (הדרכה: בדקו $|1 + \frac{x+iy}{n}|^n$ וגם $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \text{Arg}(1 + \frac{x+iy}{n}))$)

- (3) תהי $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ מסילה שלא עוברת דרך $0 \in \mathbb{C}$.
(א) הראו שקיימת מסילה $\tilde{\delta}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש $\gamma(t) = e^{\delta(t)}$ לכל $t \in [0, 1]$. (ניתן להשתמש בעובדה הבאה: עבור כל $\epsilon > 0$ קיימת חלוקה $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ כך שתמונת הקטע $[t_i, t_{i+1}]$ נמצאת בתוך איזשהו כדור $(Ball_\epsilon(\dots))$.
(ב) נניח ש γ מסילה סגורה, $\gamma(0) = \gamma(1)$. הוכיחו: $\delta(1) - \delta(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. האם $\tilde{\delta}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ בהכרח מסילה סגורה?
(ג) נניח שמסילה אחרת $\tilde{\delta}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ גם מקיימת $\gamma(t) = e^{\tilde{\delta}(t)}$. הוכיחו: $\tilde{\delta}(t) - \delta(t) = const$. מהם הערכים האפשריים של הקבוע?

- (4) יהיו $0 \leq \phi_1 < \phi_2 \leq \pi$, $R > 0$ ונגדיר מסילה $\gamma_{R, \phi_1, \phi_2} \subset \mathbb{C}$ ע"י $\{z = Re^{i\phi} \mid \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$.
(א) תהי f פונקציה רציפה המקיימת: $|f(z)| < \frac{C}{|z|^{1+\epsilon}}$ עבור $|z| \gg 1$ וקבועים $C, \epsilon > 0$. הוכיחו: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R, \phi_1, \phi_2}} f(z) dz = 0$.
(ב) יהיו $p, q \in \mathbb{C}[z]$ שני פולינומים, כך ש $\deg(q) = \deg(p) + 1$. הוכיחו/הפריכו: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R, \phi_1, \phi_2}} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0$.
(ג) תהי f פונקציה רציפה המקיימת: $\lim_{R \rightarrow \infty} (\max_{|z|=R} |f(z)|) = 0$. הראו שלכל $a > 0$ מתקיים: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R, \phi_1, \phi_2}} e^{iaz} f(z) dz = 0$.
(קודם הוכיחו עבור המקרה $0 < \phi_1 < \phi_2 < \pi$. אחר כך הרחיבו למקרה $0 = \phi_1 < \phi_2 = \pi$.)

- (5) (א) נסמן ע"י γ את המשולש עם קודקודים $0, 1, i$. (הכיוון חיובי). חשבו: i. $\int_{\gamma} z^n dz$. ii. $\int_{\gamma} \bar{z}^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$.
(ב) יהי $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ תחום חסום ופתוח, עם שפה $\partial\mathcal{U}$ עקום חלק למקוטעין (הכיוון חיובי). הוכיחו: $\int_{\partial\mathcal{U}} \bar{z} dz = 2i \cdot \text{Area}(\mathcal{U})$.
(ג) תהי $\gamma = \{z \mid \text{Im}(z) \geq 0, |z| = 1\}$, נגד כיוון השעון. חשבו: $\int_{\gamma} e^{x^2-y^2} (x+iy) (\cos(2xy) + i \cdot \sin(2xy)) dz$.
(ד) חשבו $\int_0^t e^{ax} \sin(bx) dx$, $\int_0^t e^{ax} \cos(bx) dx$ כאן $a, b, t \in \mathbb{R}$.

- (6) נניח ש F_1, F_2 פונקציות קדומות ל f בתחום \mathcal{U} קשיר מסילתית. הוכיחו: $F_1(z) - F_2(z) = const$.