יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2020 (מרצים: א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 6.

(1) (א) חשבו: $\int\limits_0^{2\pi} e^{cos(n\cdot\phi)}cos\big(n\cdot\phi+sin(n\cdot\phi)\big)d\phi$, כאן $n\in\mathbb{Z}$. (רמז: איך זה קשור ל $z^{n-1}e^{z^n}$?)

(ב) עבור פונקציות הבאות ותחומים הבאים קבעו האם לפונקציה קיימת פונקציה קדומה בתחום:

a. $\frac{1}{z^n}$ b. $\frac{sin(z)}{z}$ c. $\frac{e^z-1}{z}$ d. $\frac{1}{z^2+z+1}$ e. $\frac{cos(z)}{z}$.

i. $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ii. $\{|Im(z)|>1\}$ iii. $\{|Im(z)|<1\}$ iv. $\{|z-e^{\frac{2\pi i}{3}}|<\frac{1}{2}\}$ v. $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$.

(ג) חשבו: i. $\int\limits_{\substack{|z|=1\\ z\neq -1}}\frac{Log(z)}{z}dz$ ii. $\int\limits_{\substack{|z|=1\\ z\neq -1}}\sqrt[n]{z}\frac{sin(\sqrt[n]{z})}{z}dz$ (הענף הראשי של $\sqrt[n]{z}$.)

(ד) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$. (לכן f' רציפה ב $\mathcal{U}$) תהי $\gamma\subset\mathcal{U}$ מסילה סגורה. נניח ש f מקיימת על γ: $|f(z)-1|<1$.
הוכיחו: $\int\limits_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$.

(2) (א) נגדיר קטע סגור $[a,b]\subset\mathbb{C}$ ע"י פרמטריזציה: $[a,b]:=\{(1-t)a+tb|\ t\in[0,1]\}$. הגדירו (בדומה) את הקטעים (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$. הוכיחו: $z\in(a,b)$ אמ"מ $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{R}_{<0}$. נסחו והוכיחו טענות דומות עבור $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$.

(ב) נקבע $a,b\in\mathbb{C}$ כך ש $a\neq b$. נגדיר פונקציה $F(z)=Log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ בתחום $\mathbb{C}\setminus[a,b]$.
(i) בדקו ש F מוגדרת היטב (חד-ערכית) ואנליטית.
(ii) הוכיחו ש F היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}$ בתחום $\mathbb{C}\setminus[a,b]$.
האם לפונקציה f קיימת קדומה בתחום $\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$? (אם כן - מצאו אחת, אחרת - הוכיחו שאין)

(ג) נגדיר $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ בתחום $\mathscr{D}=\mathbb{C}\setminus\{it|\ t\in\mathbb{R},\ |t|\geq 1\}$.
(i) הראו כי קיימת ל f פונקציה קדומה $F\in\mathcal{O}(\mathscr{D})$ כך ש $F(0)=0$.
(ii) נגדיר $tan(z):=\frac{sin(z)}{cos(z)}$. תהי $0\in\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$ סביבה פתוחה וקשירה מסילתיתשל הראשית כך ש $tan(\mathcal{U})\subseteq\mathscr{D}$.
הוכיחו כי ב $\mathcal{U}$ מתקיים $F(tan(z))\equiv z$. (ולכן F הינו ענף אנליטי של $arctan(z)$)

(3) יהי $\gamma\subset\mathbb{C}$ עקום סגור שלא עובר דרך נקודה z_0. נגדיר את ה"אינדקס של γ ביחס ל z_0" ע"י $\eta(\gamma,z_0):=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma\frac{dz}{z-z_0}$.
שם אחר למספר הזה: $winding\ number$.

(א) חשבו את $\eta(\gamma,z_0)$ עבור $\gamma=\{z_0+e^{2\pi itn},\ t\in[0,1]\}$. כאן $n\in\mathbb{Z}$.

(ב) נניח ש $|z_0|<1$. חשבו את $\eta(\gamma,z_0)$ עבור $\gamma=\{e^{2\pi itn},\ t\in[0,1]\}$.

(ג) נניח ש $|z_0|>1$. חשבו את $\eta(\gamma,z_0)$ עבור $\gamma=\{e^{2\pi itn},\ t\in[0,1]\}$.

(ד) יהי $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$ תחום פתוח וחסום. נניח ש $z_0\notin\overline{\mathcal{U}}$. הוכיחו: $\eta(\partial\mathcal{U},z_0)=0$.

(ה) הוכיחו ש $\eta(\gamma,z_0)$ מספר שלם.
(תזכורת: בתרגיל בית 5, שאלה 3, הראינו כי $\gamma(t)=z_0+e^{\delta(t)}$ עבור מסילה מסוימת $[0,1]\xrightarrow{\delta}\mathbb{C}$.)

(ו) תהיינה $[0,1]\xrightarrow{\gamma_1,\gamma_2}\mathbb{C}$ שתי מסילות המקיימות $\gamma_2(0)=\gamma_1(1)$. נגדיר מסילה חדשה, $[0,1]\xrightarrow{\gamma_2*\gamma_1}\mathbb{C}$,
שתיקרא השרשור של המסילות, ע"י: $(\gamma_2*\gamma_1)(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t), & 0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$
נניח ש γ_1,γ_2 מסילות סגורות שלא עוברות דרך z_0. הוכיחו: $\eta(\gamma_2*\gamma_1,z_0)=\eta(\gamma_2,z_0)+\eta(\gamma_1,z_0)$.