יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2020 (מרצים: א. גורן, א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 7.

(1) (שאלות חזרה)

(א) האם קיימת פונקציה $f \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon(0))$ המקיימת $|f(z)| = e^{|z|}$?

(ב) תהי $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ונקבע סדרה $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ המקיימת: $\theta_n \in [-\alpha, \alpha]$.
הוכיחו: הטורים $\sum z_n$, $\sum |z_n|$ מתכנסים/מתבדרים יחד.

(ג) האם אותה הטענה מתקיימת עבור $\theta_n \in [\alpha, \pi - \alpha]$?

(ד) חשבו $\sum_{n=0}^{\infty} r^n cos(n\theta)$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n sin(n\theta)$, כאשר $0 \le r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.

(2) (א) נניח שהטור $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס ב $Ball_R(0)$. נבחר מסילה $[0,1] \xrightarrow{\gamma} Ball_R(0)$.
הוכיחו: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma z^n dz = \int_\gamma f(z)dz$. (בפרט, הטור בצד ימין מתכנס)

(ב) נניח שרדיוס ההתכנסות של הטור $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הינו $R > 0$. הוכיחו שעבור כל $r < R$ מתקיים:
$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$. (הצדיקו את כל המעברים)

(ג) נניח שרדיוס ההתכנסות של הטור $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הינו $r \ge 1$. עבור כל $|z| < 1$ נקבע מסילה $z \overset{\gamma_z}{\rightsquigarrow} 0$ (בתוך $Ball_1(0)$) ונגדיר $F(z) = \frac{\int_{\gamma_z} f(s)ds}{1-z}$. הראו כי $F \in \mathcal{O}(Ball_1(0))$ ומתקיים: $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1}) z^{n+1}$.

(ד) הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על כל קבוצה קומפקטית הזרה ל $\mathbb{N}$. בדקו שהפונקציה הגבולית, f, הינה אנליטית. (שימו לב: הטור אינו טור חזקות. האם מותר לגזור איבר-איבר?) חשבו את $f(z+1) - f(z)$.

(3) (א) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_R(0))$ ונניח שעבור סדרה $z_n \to z_0 \in \partial Ball_R(0)$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$.
הוכיחו: רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של f ב $z = 0$ הינו בדיוק R.

(ב) פתחו את $f(z) = \frac{sin(z)}{z-\pi}$ לטור טיילור בנקודה $z = 0$. מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור.

(ג) מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של $f(z) = tan(i \cdot sin(z))$ בנקודה $z = 0$.

(4) (א) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ ונניח ש $\overline{Ball_r(z_0)} \subset \mathcal{U}$. נניח ש f מקבלת ערכים ממשיים על $\partial Ball_r(z_0)$. הוכיחו: $f(z_0) \in \mathbb{R}$.

(ב) תהי $f \in \mathcal{O}(\overline{Ball_r(0)})$ ונניח ש f חסומה על $\{|z| = r\}$ בצורה הבאה: $|f| \le a$ על חצי המעגל העליון, $|f| \le b$ על חצי המעגל התחתון. הוכיחו: $|f(0)| \le \sqrt{ab}$. (רמז: השתמשו ב $f(z)f(-z)$.)

(5) (א) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ונניח שמתקיים $|f(z)| \le a + b|z|^k$. הוכיחו ש f הינה פולינום מדרגה $deg(f) \le k$. הכוונה:

i. הוכיחו: אם $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ אז $f_{-1}(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z}, & z \ne 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$ הינה גם פונקציה אנליטית ב $\mathbb{C}$ כולו.

ii. הוכיחו: אם $|f| \le a + b|z|^k$ אז $f_{-1}(z) \le \tilde{a} + \tilde{b}|z|^{k-1}$.

(ב) יהי $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ותהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ המקיימת: $f(z+1) = f(z)$, $f(z+\tau) = f(z)$ (כלומר f היא פונקציה דו-מחזורית). הוכיחו ש f פונקציה קבועה.

(ג) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ לא קבועה. הוכיחו: התמונה של f מקיימת: $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. הכוונה:
(i) הוכיחו: אם קיים $\epsilon > 0$ כך ש $|f(z)| > \epsilon$ לכל $z \in \mathbb{C}$ אז $f(z)$ קבועה.
(ii) הוכיחו: אם קיימים $\epsilon > 0$ ו $w \in \mathbb{C}$ כך ש $|f(z) - w| > \epsilon$ לכל $z \in \mathbb{C}$ אז $f(z)$ קבועה.

(6) (א) חשבו את הסדר (הריבוי) $ord_{z=0}f(z)$ עבור $f(z) = z^2 \cdot Log(1+z^5) - sin(z^7)$.
(ב) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_r(0))$ ונניח ש $ord_{z=0}f(z) = \infty$. הוכיחו: $f(z) \equiv 0$.
(ג) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ ונניח ש הסדר (הריבוי) שלה בנקודה $z_0 \in \mathcal{U}$ הנו p.
הוכיחו: $f(z) = (z - z_0)^p g(z)$ כאשר $g \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ ו $g(z_0) \neq 0$.

(7) (א) הוכיחו: כל נקודת פנים של קבוצה $S \subset \mathbb{C}$ הינה נקודת הצטברות.
(ב) תהי $S \subset \mathbb{C}$ קבוצה קשירה מסילתית. הוכיחו: כל הנקודות שלה הינן נקודות הצטברות.
(ג) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):
(i) אם $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ לא קבועה אז יש לה רק מספר סופי של אפסים בכל תת קבוצה סגורה של $\mathcal{U}$.
(ii) אם $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ לא קבועה אז יש לה רק מספר סופי של אפסים בכל תת קבוצה חסומה של $\mathcal{U}$.
(iii) אם $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ לא קבועה אז יש לה רק מספר סופי של אפסים בכל תת קבוצה קומפקטית של $\mathcal{U}$.
(iv) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_R(0))$ ונניח שעבור $z = x + iy$ פונקציה $f(x)$ הינה (אי-)זוגית. אז גם $f(z)$ (אי-)זוגית.

(8) (א) השתמשו בעיקרון היחידות עבור פונקציות אנליטיות כדי לפתור (בצורה מיידית) את שאלה 4 ת"ב.2, ואת שאלה 4 ת"ב.4.
(ב) האם קיימת $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ כך ש $\{f(\frac{1}{n}) = 0\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f(i) = 1$?
(ג) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_2(0))$ ונניח שעבור כל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\oint\limits_{|z|=1} \frac{f(z)dz}{(n+1)z-1} = 0$. האם בהכרח מתקיים $f \equiv 0$?