



חזו"א 3 להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2020. תרגיל בית מס' 14.

(מרצים: י. אופנהיים, ד. קרנר)

(א) תהי $\vec{C} = \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \\ x^2 + y^2 = 2rx, z > 0 \end{aligned} \right\}$ כאשר $0 < r < R$, וכיוון המסילה חיובי אם מסתכלים מנקודה

$(0, 0, +\infty)$. חשבו את צירקולצית השדה $\vec{F} = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$ לאורך \vec{C} .

(ב) חשבו את צירקולצית השדה $\vec{F} = (z, x, y)$ לאורך העקום $\left\{ \begin{aligned} z = x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \right\}$ נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים

מנקודה $(0, 0, +\infty)$.

(ג) חשבו את העבודה של שדה $\vec{F} = (y-z, z-x, x-y)$ לאורך העקום $\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, R > 0 \\ x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \sin(\beta) + z \cdot \sin(\gamma) = 0 \end{aligned} \right\}$

המכוון נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(+\infty, 0, 0)$. (כאן $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ קבועים).

(ד) עבור עקומה $C = \{x^{10} + y^{100} + z^{1000} = 2020, x - y + z = 0\}$ בחרו כיוון וחשבו $\oint_C \frac{ydz - zdy}{y^2 + z^2}$.

(ה) חשבו $\iint_S \text{rot} \frac{\cos(x^2)\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^8} \cdot d\vec{S}$ עבור $S = \{x^4 + y^6 + z^8 = 1, z \geq -\frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}^3$, עם נורמל חיצוני.

(א) תהי $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3, C^1$. נניח שמתקיים: $\nabla(f) \neq 0$ בכל נקודה של משטח $S = \{f(x, y, z) = 0\}$. נניח גם ש S

הינו משטח קשיר מסילתית וחסום. הוכיחו/הפריכו: $\iint_S \nabla(f) \cdot d\vec{S} \neq 0$.

(ב) יהי \vec{F} שדה C^1 בסביבה של $p \in \mathbb{R}^3$. הסיקו ממשפט גאוס: $\text{div}(\vec{F})|_p = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial \text{Ball}_\epsilon(p)} \vec{F} d\vec{S}}{\text{vol}_3(\text{Ball}_\epsilon(p))}$

בפרט, אם השדה לא נוצר ולא "נעלם" ב p אז $\text{div}(\vec{F})|_p = 0$.

(ג) יהי \vec{F} שדה C^1 בסביבה של $p \in \mathbb{R}^3$ ויהי S משטח חלק המכיל את p . הסיקו ממשפט סטוקס:

$\text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{N}_S|_p = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial(\text{Ball}_\epsilon(p) \cap S)} \vec{F} d\vec{C}}{\text{vol}_2(\text{Ball}_\epsilon(p) \cap S)}$ או $\text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{N}_S|_p = 0$ אם קווי השדה לא "מסתובבים" ליד p .

(א) יהי $\mathbb{R}^3 \supseteq \mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ שדה משמר, C^1 , בתחום פתוח וקשיר מסילתית. נקבע נקודה $\underline{x}_0 \in \mathcal{D}$ ונגדיר

$\phi(\underline{x}) = \int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}} \vec{F} d\vec{C}$. בדקו שההגדרה לא תלויה בבחירת המסלול מ \underline{x}_0 ל \underline{x} . הוכיחו: $\text{grad}(\phi) = \vec{F}$.

(ב) במקרים הבאים בדקו האם שדה משמר מקומית/גלובלית. אם כן, מצאו את הפוטנציאל.

i. \mathbb{R}^2 , $\vec{F} = e^y(\hat{x} + x\hat{y})$. ii. \mathbb{R}^2 , $\vec{F} = \frac{y\hat{x} + x\hat{y}}{1+x^2y^2}$. iii. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\vec{F} = \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2 + y^2}$.

iv. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$, $\vec{F} = \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2 + y^2}$. v. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$, $\vec{F} = \frac{-x\hat{x} + y\hat{y}}{(x^2 + y^2)^2}$.

(4) יהי \vec{F} משמר מקומית ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(א) הוכיחו: \vec{F} משמר גלובלית ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ אם m משמר גלובלית ב $\{1 < x^2 + y^2 < 1 + \epsilon\}$.

הדרכה: תהי לולאה ונקבע פרמטריזציה שלה בקוטביות: $\phi(t), r(t)$, כאן $\phi(t) \in [0, \infty)$. הוכיחו כי קיימת

לולאה $\tilde{\gamma}$ שעבורה פונקציה $\phi(t)$ מונוטונית (אולי קבועה) ומתקיים $\oint_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\gamma = \oint_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\gamma$. הסיקו כי קיימת לולאה

$\tilde{\gamma}$ בתוך $\{1 < x^2 + y^2 < 1 + \epsilon\}$ כך ש $\oint_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\gamma = \oint_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\tilde{\gamma}$.

(ב) הוכיחו: קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שהשדה $(F_x + \frac{cy}{x^2 + y^2}, F_y - \frac{cx}{x^2 + y^2})$ משמר גלובלית ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(5) קבלו בעזרת קואורדינטות מרוכבות, $\bar{z} = x - iy, z = x + iy$, את ההצגות:

i. $\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{dz}{z} - \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \right)$. ii. $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{z} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \right)$. (המשך בסמסטר הבא ...)