חדו"א 2 להנדסה 201.1.9721

אביב 2022 (מרצים: ג. גולן, ד. גולקו, מ. לוין, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 10.

1. המשטחים למטה נתונים ע"י פרמטריזציה. קבלו את המשוואות שמגדירות את המשטחים. ציירו/תארו את המשטחים. השתמשו בפרמטריזציה כדי לחשב את וקטור הנורמל בנקודה כלשהי של משטח. בדקו האם הנורמל פונה כלפי חוץ/מעלה.

i. $\vec{r}(s,t) = \big(s\cdot cos(t)-1,\, s\cdot sin(t)-2,\, s^2-3\big)$, $s\geq 0$, $t\in[0,2\pi]$.

ii. $\vec{r}(s,t) = \big(\sqrt{1+s^2},\, s\cdot cos(t),\, s\cdot sin(t)\big)$, $s\in\mathbb{R}$, $t\in[0,2\pi]$.

iii.* $\vec{r}(\phi_1,\phi_2) = \Big[(R_2+R_1 sin(\phi_1))cos(\phi_2),\, (R_2+R_1 sin(\phi_1))sin(\phi_2),\, R_1 cos(\phi_1)\Big]$, $\phi_1,\phi_2\in[0,2\pi]$, כאן $R_2>R_1$. למשטח הזה קוראים: torus. שמות אחרים: כעך, סליל.

הדרכה להדמית הטורוס. בדקו שהחתך ע"י $\phi_2=0$ הנו מעגל במישור xz. (מה מרכזו והרדיוס?) בדקו כי הטורוס מתקבל ע"י סיבוב של המעגל מסביב לציר $\hat{z}$. איזה צורה מתקבלת אם נקבע $\phi_1=const$? למה חשוב לקחת $R_2>R_1$?

2. א. נניח שהמשטח הינו גרף של פונקציה, $S=\{z=z(x,y)|\ (x,y)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2\}$. תהי f פונקציה רציפה על S.
הוכיחו: $\iint\limits_S f dS = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\cdot dxdy$.

ב. נניח שהמשטח נתון בקואורדינטות גליליות, $S=\Big\{(r\cdot cos(\phi), r\cdot sin(\phi), z(r,\phi))|\ (r,\phi)\in\mathcal{D}\Big\}$. תהי f פונקציה רציפה על S. הוכיחו: $\iint\limits_S f dS = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x(r,\phi),y(r,\phi),z(r,\phi))\cdot\sqrt{r^2+(\frac{\partial z}{\partial\phi})^2+r^2(\frac{\partial z}{\partial r})^2}\cdot drd\phi$.

ג. נניח שהמשטח נתון בקואורדינטות כדוריות, $S=\Big\{\vec{r}=\vec{r}(\theta,\phi)|\ (\theta,\phi)\in\mathcal{D}\Big\}$. קבלו נוסחה דומה.
כאן $\vec{r}=(r\cdot sin(\phi)\cdot cos(\theta), r\cdot sin(\phi)\cdot sin(\theta), r\cdot cos(\phi))$.

ד. חשבו את שטח של המשטח i. $\begin{Bmatrix} z=2-x^2-y^2 \\ z\geq\sqrt{x^2+y^2}\end{Bmatrix}$ ii. $\begin{Bmatrix} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\leq 1,\ 0<b\leq a\end{Bmatrix}$ (אחרי מעבר לאינטגרל כפול כדאי להשתמש בקוטביות, ולא אליפטיות. אז מגיעים לאינטגרל מהצורה $\int\frac{|sin(\phi)|d\phi}{\sqrt{c+sin^2(\phi)}}$, ומפעילים הצבה.)

ה.* נניח שהמשטח הוא חלק של טורוס משאלה 1.iii, $S=\Big\{\vec{r}=\vec{r}(\phi_1,\phi_2)|\ (\phi_1,\phi_2)\in\mathcal{D}\Big\}$. קבלו נוסחה $\iint\limits_S fdS=\iint\limits_{\mathcal{D}} f\big(x(\phi_1,\phi_2),y(\phi_1,\phi_2),z(\phi_1,\phi_2)\big)\cdot\big(R+r\cdot sin(\phi_1)\big)r\cdot d\phi_1 d\phi_2$. חשבו את שטח של הטורוס.

ו. חשבו $\oiint\limits_S (x^2+y^2)dS$ כאשר S היא המעטפת של הגוף $\{\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1\}\subset\mathbb{R}^3$.

ז. חשבו את המסה של כליפה $\{x^2+y^2+z^2=1,\ -\frac{1}{2}\leq z\leq\frac{\sqrt{3}}{2},\ x\leq y\}$ בעלת צפיפות משטחית בכל נקודה השווה למרחק מהנקודה למישור xy.

3. א. נניח שהמשטח הינו גרף של פונקציה, $S=\{z=z(x,y),\ (x,y)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2\}$, והנורמל פונה כלפי מעלה, $\mathcal{N}_z>0$. הוכיחו: $\iint\limits_S\vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{\mathcal{D}} det\begin{bmatrix}F_x & F_y & F_z\\ 1 & 0 & \partial_x z\\ 0 & 1 & \partial_y z\end{bmatrix}dxdy$.

ב. חשבו את שטף של שדה $\vec{F}=(e^x,e^y,z)$ דרך המשטח המוגדר ע"י $z=xy$, $0\leq x\leq 1$, $|y|\leq x$.

ג. נניח שהמשטח הינו חלק של ספרה, $S=\{r=R,\ (\phi,\theta)\in\mathcal{D}\}$, והנורמל פונה כלפי חוץ. נניח שהשדה הינו מהצורה $\vec{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\cdot\vec{r}$, כאן $\vec{r}=(x,y,z)$. הוכיחו: $\iint\limits_S\vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{\mathcal{D}} f\cdot R^3 sin(\phi)d\phi d\theta$.

ד. נניח שהמשטח הינו חלק של גליל, $S=\{r=const,\ (\phi,z)\in\mathcal{D}\}$, והנורמל פונה כלפי חוץ.
הוכיחו: $\iint\limits_S\vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{\mathcal{D}}(F_x\cdot x+F_y\cdot y)d\phi dz$.

ה.* חשבו את שטף השדה $\vec{F}=(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$ דרך המשטח $\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$, עם נורמל חיצוני. (ודאו כי האינטגרל מתכנס, למרות התאפסות של מכנה.)