חדו"א 2 להנדסה 201.1.9721

אביב 2022 (מרצים: ג. גולן, ד. גולקו, מ. לוין, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 11.

1. יהיו $\vec{F}$, $\vec{G}$ שדות וקטוריים ו f פונקציה סקלרית, כולם גזירים ברציפות פעמיים. הוכיחו:

i. $div(\vec{F} \pm \vec{G}) = div(\vec{F}) \pm div(\vec{G})$
ii. $rot(\vec{F} \pm \vec{G}) = rot(\vec{F}) \pm rot(\vec{G})$
iii. $div(rot(\vec{F})) = 0$
iv. $rot(grad(f))=0$
v. אם $\vec{F}=f\cdot\vec{r}$ אז $div(\vec{F})=\vec{r}\cdot grad(f)+3f$
vi. $\nabla(f\cdot g)=grad(f)\cdot g+f\cdot grad(g)$
vii. $div(grad(f)) = \Delta(f) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(f)$
viii. $\nabla(f \cdot \vec{F}) = grad(f) \cdot \vec{F} + f \cdot div(\vec{F})$
ix. $rot(f \cdot F) = grad(f) \times \vec{F} + f \cdot rot(\vec{F})$
x. $.div(\vec{F} \times \vec{G}) = rot(\vec{F}) \cdot \vec{G} + \vec{F} \times rot(vG)$

2. במקרים הבאים חשבו את שטף השדה דרך המשטח (בכמה שיותר דרכים שונות):

א. $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^n}$ ו $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}\subset\mathbb{R}^3$, כאן $\vec{r}=(x,y,z)$, $r=\|\vec{r}\|$, עם הנורמל החיצוני. (מה אומר כאן משפט גאוס?)

ב. $\vec{F} = ln(y^2+z^2+1)\hat{x} + \frac{e^x}{z^2+1}\hat{y} + (x-y-1)\hat{z}$ ו $S = \{0 \le z = \sqrt{x^2+y^2} \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$, עם הנורמל החיצוני, כלומר $\mathcal{N}_z \le 0$.

ג. $\vec{F}=(3x-2y+z)\hat{x}+(2x+3y-z)\hat{y}+(x-3y+z)\hat{z}$ ו $S=\{|3x-2y+z|+|2x+3y-z|+|x-3y+z|=1\}\subset\mathbb{R}^3$, עם הנורמל החיצוני. (רמז: היעזרו בשאלה 2.xi של תרגיל בית 8.)

ד. שטף של $rot(\vec{F})$, כאשר $\vec{F} = (0, x+1, 0)$ ו $\vec{S} = \{x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \ge -\sqrt{2}\}$, עם הנורמל החיצוני. (רמז: כדאי לחשב את $div(rot\vec{F})$.)

ה. $\vec{F} = \frac{(x,y,z)}{r^3}$ ו $\vec{S}$ הוא שפת הגוף $\left\{x^2+y^2+(z+\frac{3}{4})^2 \le 4,\ x^2+y^2-z \ge 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$ עם הנורמל החיצוני.

ו. שטף של $rot(\vec{F})$ דרך $\vec{S} = \{x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \ge 0\} \subset \mathbb{R}^3$ עם הנורמל כלפי מעלה, $\mathcal{N}_z \ge 0$, כאשר $\vec{F} = \left(y+cos(z^2), 2x-ln(4+x^2y^2), x^3yz^2\right)$.

ז. $\vec{F} = \frac{(4yz,-9xz,5xy)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ ו $\vec{S}$ מוגדר ע"י $x^2+y^2+z^2 = 4$, עם הנורמל החיצוני. (רמז: האם ניתן "להיפטר" מהמכנה לאורך המשטח?)

ח. $\vec{F} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ ו $\vec{S} = \{2008x^2+2009y^2+2010z^2 = 2011\}$, עם הנורמל החיצוני. (רמז: כדי להשתמש במשפט גאוס צריכים "לסלק" את ראשית הצירים מהגוף)

ט. $\vec{F} = (e^y, ye^x, x^2y)$ ו $\vec{S} = \{z = x^2+y^2,\ (x,y) \in [0,1]\times[0,1]\}$ עם הנורמל החיצוני לפרבולואיד.

3. במקרים הבאים חשבו את עבודת השדה לאורך המסילה (בכמה שיותר דרכים שונות):

א*. $\vec{F} = (y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2)$ ו $\vec{C} = \left\{x^2+y^2+z^2 = 2RX,\ x^2+y^2 = 2rx,\ z > 0\right\}$. כאן $0 < r < R$, והכיוון חיובי אם מסתכלים מנקודה $(0,0,+\infty)$.

ב. $\vec{F} = (z,x,y)$ ו $\vec{C} = \left\{z = x^2-y^2,\ x^2+y^2 = 1\right\}$, נגד כיוון השעון אם מסתכלים מנקודה $(0,0,+\infty)$.

ג. $\vec{F} = (y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$ ו $\vec{C} = \left\{x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\right\}$, נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(10,10,10)$.

ד. $\vec{F}=(y-z,z-x,x-y)$ ו $\vec{C} = \{x^2+y^2+z^2 = R^2,\ xsin(\alpha)+ysin(\beta)+zsin(\gamma) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, המכוון נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(+\infty,0,0)$. (כאן $R > 0$ ו $0 < \alpha,\beta,\gamma < \frac{\pi}{2}$ קבועים.)

ה*. עבור עקומה $C = \{x^{10}+y^{100}+z^{1000} = 2017,\ x-y+z = 0\}$ בחרו כיוון וחשבו $\oint_C \frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}$.

ו. $\vec{F} = (x+y^2, y+z^2, z+x^2)$, כאן $\vec{C}$ הוא החלק מהעקומה $\{x+y+z = 1,\ x\cdot y = 0\}$, המתחיל ב $(1,0,0)$ ומסתיים ב $(0,1,0)$.

4. תהי f בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב $\mathbb{R}^3$ כולו וכך שמתקיים: $\nabla f \neq 0$ בכל נקודה של משטח $S = \{f(x,y,z) = 0\}$. נניח גם ש S הינו משטח קשיר וחסום. הוכיחו/הפריכו: $\iint\limits_S \nabla f \cdot d\vec{S} \neq 0$.