חדו"א 2 להנדסה 201.1.9721

אביב 2022 (מרצים: ג. גולן, ד. גולקו, מ. לוין, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 4.

1. א. עבור פונקציות הבאות בדקו: רציפות, נגזרות חלקיות, רציפות של נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות. (בכל הנקודות)

i. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ii. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ iii. $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.

ב. נגדיר פונקציה $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{\alpha}ln(x^2+y^2): & (x,y)\neq(0,0)\\ 0: & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. מצאו את כל הערכים של α שעבורם $f(x,y)$ רציפה. מצאו את כל הערכים של α שעבורם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית.

ג.* תהי $f(x,y)=\begin{cases}\frac{ln|\frac{x}{y}|}{x-y}, & y\neq x\\ g(x), & y=x\end{cases}$. באילו נקודות x ניתן להגדיר $g(x)$ כך ש $f(x,y)$ תהיה רציפה (בנקודות אלו)? בעלת נגזרות חלקיות (מסדר ראשון)? דיפרנציאבילית?

ד.* תהי $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{sin(x+y+z)-sin(x+y-z)}{z}, & z\neq 0\\ g(x,y), & z=0\end{cases}$. באילו נקודות (x,y) ניתן להגדיר $g(x,y)$ כך ש $f(x,y,z)$ תהיה רציפה (בנקודות אלו)? בעלת נגזרות חלקיות (מסדר ראשון)? דיפרנציאבילית?

2. א. הוכיחו כי פונקציה $f(x,y)=arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$ מקיימת: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ עבור כל (x,y) בתחום הגדרתה.

ב. נניח ש $f(t)$ גזירה. הוכיחו כי פונקציה $z(x,y)=e^y f(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ מקיימת $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$ בתחום הגדרתה.

ג. נניח ש $f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית והומוגנית מסדר n,(כלומ, מקיימת: $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ עבור כל $t\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $x\partial_x f+y\partial_y f+z\partial_z f=nf$.

ד. נניח ש $z(x,y)$ דיפרנציאבילית ומקיימת את המשוואה $x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$ כאן $f(t)$ גזירה. הוכיחו כי $(x^2-y^2-z^2)\partial_x z+2xy\partial_y z=2xz$.

ה. תהי $f(x,y)=g(x^2+y^2)$ כאשר $g(t)$ גזירה. הוכיחו: $y\partial_x f-x\partial_y f=0$.

ו. תהי $\phi(x,y,z)=f(x^2-2y^3+z^4)$ כאשר $f(t)$ פונקציה גזירה ברציפות עם נגזרת לא מתאפסת.
הוכיחו כי $\frac{y^2z^3\partial_x\phi+xz^3\partial_y\phi+xy^2\partial_z\phi}{f'(x^2-2y^3+z^4)}$ הנו קבוע ומצאו את הקבוע.

3. א. מצאו נגזרת מכוונת של $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ בנקודה $M=(1,1)$ בכיוון $((cos(\alpha),sin(\alpha))$.
באיזה כיוון הנגזרת המכוונת מקבלת את הערך הגדול/הקטן ביותר?

ב. מצאו את כל הנקודות (x,y) שבהן הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=x^3+y^3$ בכיוון $(2,1)$ מקבלת את הערך הגדול ביותר.

ג. מצאו את הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=ln(x^2+y^2)$ בנקודה $M=(x_0,y_0)$ בכיוון שניצב לקו רמה של $f(x,y)$ ועובר דרך הנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

ד. מצאו את כל הנקודות בהן נגזרת מכוונת של פונקציה $f(x,y)=sin(x)^2+cos(y)^2$ בכוון $(2,1)$ מקבלת את הערך הקטן ביותר.

ה. תהי $f(x,y,z)=arcsin(\sqrt{\frac{xz}{y^2}})$. הוכיחו כי $x\partial_x f+y\partial_y f+z\partial_z f$ הנו קבוע ומצאו את הקבוע הזה. מצאו את הכוון של העליה התלולה (החדה) ביותר ואת הכוון של הירידה התלולה (החדה) ביותר של $f(x,y,z)$ בנקודה $(3,4,5)$.

ו. תהי $f(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות. נתון: $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(-3,6)}=-2$ $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(-3,6)}=1$. נגדיר $\phi(u,v,w)=f(u^2-v^2,u^2vw)$. חשבו מכפלה סקלרית של $grad(\phi)|_{(1,2,3)}$ בווקטור $(1,1,1)$.