חדו"א 2 להנדסה 201.1.9721

אביב 2022 (מרצים: ג. גולן, ד. גולקו, מ. לוין, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 6.

1. א. מצאו ומיינו את כל נקודות הקיצון (ב $\mathbb{R}^2$) של הפונקציות הבאות:
i. $f(x,y) = e^{x+y} + e^{-x} + e^{-y}$, ii. $f(x,y) = |3x| + x^4y^2$, iii. $f(x,y) = sin(x)cos(y)$,
iv. $f(x,y) = sin(x) - cos(y)$.
ב. הוכיחו כי לפונקציה $f(x,y) = (1+e^y)cos(x) - ye^y$ יש אינסוף נקודות מקסימום (מקומי) ואינסוף נקודות אוכף, אך אין אף נקודת מינימום.
ג. תהי $f(x,y) = g_1(x) + g_2(y)$. הוכיחו כי (x_0, y_0) היא נקודת max של $f(x,y)$ אמ"ם x_0 היא נקודת max של $g_1(x)$ ו y_0 היא נקודת max של $g_2(y)$. נסחו והוכיחו טענות מתאימות לגבי נקודת min ונקודת אוכף.
ד. תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית. נניח שעבור כל ישר l העובר דרך $(0,0)$ הנקודה היא מינימום מקומי של הצמצום $f(x,y)|_l$. האם זה מבטיח ש $(0,0)$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x,y)$? (רמז: $f(x,y) = (y-x^2)^2 - y^4$)

2. מצאו את ערך המקסימום ואת ערך המינימום של הפונקציה בתחום הנתון, אם הם קיימים.
(אם הם לא קיימים - הסבירו למה)
א. $f(x,y) = xy$, $\mathcal{D} = \{|x|^a + |y|^a \le 1\}$, $a > 0$,
ב. $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $\mathcal{D} = \{x \ge 0,\ y \ge 0,\ 3y^2 \ge 2x^3,\ 3x^2 \ge 2y^3\}$.
ג. $f(x,y) = 3 - (x-1)^2 - (y+1)^2$, $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 - 2x + 2y \le -1\}$.
ד. $f(x,y) = sin(x) - sin(y)$, $\mathcal{D} = \{|x| + |y| \le 1\}$.
ה.* $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$, $\mathcal{D} = \{|z| \le 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.
ו. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\mathcal{D} = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$. ($a > b > c > 0$).
ז. $f(x,y) = e^{x^2+3y^2}$, $\mathcal{D} = \{4x^2 + y^2 \le 1\}$.
ח. $f(x,y) = sin(x^2 - y^2)$, $\mathcal{D} = \{16x^2 + 9y^2 \le \pi,\ x + y \ge 0\}$.
ט. $f(x,y) = x^3 - 2x + 2xy^2$, $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$, או $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.
י. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{xy}{8} + \frac{1}{y}$, $\mathcal{D} = \{0 < x \le 4,\ 0 < y \le 4,\ xy \ge 1\}$, או $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.

3. הוכיחו כי למשוואה $2xy + y^2z + 4e^z = 0$ יש פתרון יחיד ודיפרנציאבילי $z(x,y)$ המוגדר בסביבה של $(x_0,y_0) = (1,-2)$ ומקיים $z(x_0,y_0) = 0$. מצאו את הערך הקטן/הגדול ביותר של הנגזרת הכיוונית $\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}|_{(1,-2)}$.

4. א. מצאו את המרחק (הקטן ביותר) בין העקומות: $\{y = x^2 + c,\ z = 0\}$ (כאן $c > 0$), $\{z = ax,\ y = 0\}$.
ב. מצאו את המרחק (הקטן ביותר) בין נקודה P לעקום C במקרים הבאים:
i. $P = (0,1)$, $C = \{y^2 + x^2 - 2x = -1\} \subset \mathbb{R}^2$, ii. $P = (0,0)$, $C = \{x^4 + y^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
ג. מצאו את הנקודות על משטח $S = \{x^ay^bz^c = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, $a,b,c > 0$ הקרובות ביותר לראשית הצירים.
ד.* מצאו על העקום $7x^2 + 8xy + y^2 = 45$ את הנקודות הקרובות ביותר לראשית הצירים.