



חזר"א 2 להנדסה 201.1.9721
 אביב 2022 (מרצים: ג. גולן, ד. גולקו, מ. לוי, ד. קרנר)
 תרגיל בית מס' 7.

1. א. ציירו את תחומי האינטגרציה והחליפו את סדר האינטגרציה באינטגרלים הבאים:
- i. $\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+2} f(x,y) dy$ ii. $\int_1^5 dx \int_0^{\sqrt{5-x}} f(x,y) dy$ iii. $\int_{-1}^1 dy \int_{\arcsin(y)}^{\pi-\arcsin(y)} f(x,y) dx$
- ב. חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: כדאי להחליף את סדר אינטגרציה)
- i. $\int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^4}}^{\sqrt{1-y^4}} ye^{x^2} dx$ ii. $\int_1^e dx \int_0^{\ln(x)} \frac{dy}{e^y+1}$ iii. $\int_0^1 dy \int_0^{\arccos(y)} \frac{dx}{\sin(x)+10}$
2. א. מצאו את החלפת קואורדינטות, $(x,y) \rightarrow (s,t)$, אשר מעבירה את התחומים הבאים למלבן. ציירו את התחומים בצירי קואורדינטות החדשים. בכל אחד מהמקרים בדקו כי ההעתקה הפיכה וחשבו את היעקוביאן.
- i. $D = \left\{ \begin{matrix} x \leq y \leq x+1, \\ -x \leq y \leq 1-x \end{matrix} \right\}$ ii. $D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ iii. $D = \{(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 3\}$
- iv. $D = \left\{ \begin{matrix} x^2 \leq y \leq x^2+1, \\ 0 \leq x \leq 2 \end{matrix} \right\}$ v. $D = \left\{ \begin{matrix} x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \end{matrix} \right\}$
- ב. חשבו את האינטגרלים הבאים:
- i. $\iint_{\left\{ \begin{matrix} 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \\ x \leq y \leq x\sqrt{3} \end{matrix} \right\}} \arctan \frac{y}{x} dx dy$ ii. $\iint_{\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ iii. $\iint_{\left\{ \begin{matrix} x \leq y \leq 2x, \\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \end{matrix} \right\}} |xy| dx dy$
- iv. $\iint_{\left\{ \begin{matrix} x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \end{matrix} \right\}} x|y| dx dy$ v. $\int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$ vi. $\iint_{\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}, \\ 3x \leq y \leq 5x \end{matrix} \right\}} \sqrt{\left| \frac{y}{x} \right|} dx dy$
- vii. $\int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2}) dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (האם פונקציה $\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$ רציפה וחסומה בתחום האינטגרציה?)
3. בהינתן החלפת משתנים $(x,y) \rightarrow (s(x,y), t(x,y))$ וההחלפה הפוכה $(s,t) \rightarrow (x(s,t), y(s,t))$ הוכיחו: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \mathbb{I}_{2 \times 2}$
4. מצאו את שטח התחומים החסומים ע"י עקומות הבאות:
- i. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ ii. $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$ iii. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ iv. $|2x-y| + |2y-x| = 1$
- v. $\left\{ \begin{matrix} 0 \leq r \leq \cos(\phi), \\ 0 \leq r \leq \sin(\phi) \end{matrix} \right\}$ vi. $\left\{ \begin{matrix} ay \leq x^2 \leq by, \\ cx \leq y^2 \leq dx \end{matrix} \right\}$ (כאן: $0 < a < b, 0 < c < d$)
- vii.* $\{x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2\}$ viii. $\sqrt{x^2+y^2} = |\sin(n \cdot \arctan \frac{y}{x})|$ (רמז: כדאי לעבור לקוטביות ולוודא כי התחום הוא פרח בעל $2n$ עלי כותרת.)
5. חשבו את הנפח של הגופים הבאים:
- i. $a, b, c > 0 \{ax^2 + by^2 + cz^2 \leq 1\}$ ii.* $\frac{1}{2} \geq a, b \geq 0 \{x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq x^2 + y^2, z \leq ax^2 + by^2\}$
- iii. $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2, z \leq xy\}$ iv. $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$