



חזו"א 2 להנדסה 201.1.9721
אביב 2022 (מרצים: ג. גולן, ד. גולקו, מ. לוין, ד. קרנר)
תרגיל בית מס' 8.

1. א. ציירו את תחום האינטגרציה והחליפו את סדר האינטגרציה (בכל צורות האפשריות) במקרים הבאים:

$$i. \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \quad ii. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz$$

ב. החליפו את סדר האינטגרציה כך שתתאפשר אינטגרציה פנימית ובסוף יישאר אינטגרל רגיל (במשתנה אחד)

$$i^*. \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt[3]{x}} dy \int_{y^4}^{\sqrt[4]{y}} f(z) dz \quad ii. \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}} dy \int_{\frac{\pi}{2}-x^2-y^2}^{\cos(x^2+y^2)} f(z) dz$$

2. ציירו את הגופים הבאים וחשבו את הנפחים שלהם. נסו לחשב בכמה שיותר דרכים שונות (כדוריות, גליליות,) מעבר לאינטגרל חוזר)

$$i. \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + \frac{3}{4} \end{array} \right\} \quad ii. \mathcal{D} = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \quad iii. \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq ax^2 + by^2 \\ x^2 + y^2 \leq 3 \end{array} \right\}$$

$$iv. a > 1, \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 \leq z \leq ax^2 + ay^2 \end{array} \right\} \quad v. \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$vi. \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 1 \\ 0 \leq x, y, z \leq 1 \end{array} \right\} \quad vii. a > 0, \mathcal{D} = \{ a(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \}$$

$$viii. \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq x \end{array} \right\} \quad ix. \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0 \leq z \leq xy \end{array} \right\} \quad x. \mathcal{D} = \{ |x| + |y| + |z| \leq 1 \}$$

$$xi. \mathcal{D} = \{ |x+2y+3z| + |2x+3y+z| + |3x+y+2z| \leq 1 \} \quad (u = x+2y+3z, v = 2x+3y+z, w = 3x+y+2z)$$

$$xii. \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq 1-x^2-y^2 \\ (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \end{array} \right\} \quad xiii. \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} -xy \leq z \leq xy \\ \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 1 \end{array} \right\}$$

3. חשבו את האינטגרלים

$$i. \iiint_{0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 4} (z + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz \quad ii. \iiint_{\mathcal{D}} z y e^{x+y^2} dx dy dz \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 2, \\ \frac{\pi}{3} \leq z \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{y^2}{4} \leq z \leq y^2, \\ y \geq 0. \end{array} \right\}$$

$$iii. \iiint_{\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} \leq 1} xyz dx dy dz \quad (z = u^4 c, y = v^4 b, x = u^4 a)$$

$$iv. \iiint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-x^2-y^2} z dx dy dz$$

4. במקרים הבאים חשבו את המסת הגוף בעל צפיפות ρ נתונה:

$$i. \rho = x, \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x \leq y \leq x\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\} \quad ii^*. \rho = 1, \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} y^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$iii. \rho = z^2 + 1, \mathcal{D} = \left\{ z^2 \leq x^2 + y^2 + 1 \leq 2 \right\} \quad iv. \rho = 1, \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq \cos(x)\cos(y) \\ |x+y| \leq \frac{\pi}{2}, |x-y| \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$